Devoir de synthèse de mathématiques

Jeudi 20 janvier 2005

Durée : 3 heures

Tout document et tout moyen de communication sont interdits.
Les copies devront être rédigées avec soin. On énoncera avec précision les résultats utilisés.

Les exercices sont indépendants. Les résultats aux questions qui ne seront pas démontrés peuvent être admis pour répondre aux questions suivantes.

Exercice 1. Equations différentielles et séries. [Barème indicatif : 6 pts.]

1. Soit un entier $n \geq 0$. On considère l'équation différentielle

$$y_n''(t) + y_n(t) = \cos(n\,t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

   1.1 Donner, en fonction de n, l'ensemble des solutions réelles de cette équation.

   1.2 En déduire l'ensemble des solutions réelles de l'équation différentielle

$$y_n''(t) + y_n(t) = a_n \cos(n\,t) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

   où a_n est une constante réelle.

2. On considère une suite numérique réelle $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que la série $\sum |a_n|$ soit convergente.
   On pose

$$f(t) = \sum_{n\geq 0} a_n \cos(n\,t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

   Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

3. En le justifiant avec précision à l'aide des théorèmes du cours, chercher les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + y(t) = \sum_{n\geq 0} a_n \cos(n\,t) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

   Montrer en particulier que les solutions sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. **Séries entières, séries alternées** **[Barème indicatif: 4 pts.]**

Soit F la fonction donnée pour x dans $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t^2)}{t}\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

1. Sans chercher à calculer une primitive de $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$, montrer que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que sur $]-1,1[$, le développement de F en série entière est :

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n^2} + \cdots. \tag{6}$$

3. On pose

$$F_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n^2} \quad \forall x \in [0,1]. \tag{7}$$

   3.1 Montrer que la convergence de la série de fonctions $\sum F_n$ est uniforme sur $[0,1]$.

   3.2 En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2}$.

4. 4.1 Pour quelles valeurs de l'entier N est-on certain que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n+1}}{2n^2}$ soit une valeur approchée à 10^{-2} de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)}{t}\,\mathrm{d}t$?

   4.2 Ecrire sous forme de somme de fractions une valeur approchée à 10^{-2} de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)}{t}\,\mathrm{d}t$.

Problème. [Barème indicatif: 10 pts.]

PARTIE I : Etude d'une série de fonctions

1. *Question préliminaire.* Soit $g\ :\ ]1,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{\ln x}{x-1} \quad \forall x \in]1,+\infty[. \tag{8}$$

   Montrer que g est décroissante. En déduire qu'elle est bornée.

2. On considère la série de fonctions de terme général f_n ($n \geq 2$), définie sur $[1,+\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n \ln n} \quad \forall n \geq 2, \quad x \geq 1. \tag{9}$$

   Montrer que cette série de fonctions est simplement convergente sur $[1,+\infty[$. On pose alors

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) \quad \forall x \in [1,+\infty[. \tag{10}$$

3. Soit un réel $a > 1$. Montrer que la série de fonctions est normalement convergente sur $[a, +\infty[$.

4. On pose $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n$.

   4.1 Montrer qu'il existe un réel $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in [1, +\infty[$:
$$|R_N(x)| \leq \frac{M}{\ln(N+1)}. \tag{11}$$

   4.2 Montrer que f est continue sur $[1, +\infty[$.

5. Montrer que f est C^1 sur $]1, +\infty[$.

PARTIE II : Représentation graphique

6. Montrer que f est décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$.
7. Montrer que
$$0 \leq f(x) \leq g(x)\frac{1}{x \ln 2} \quad \forall x > 1. \tag{12}$$
   En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
8. Donner l'allure de la représentation graphique de f en se restreignant à l'intervalle $[\mathrm{e}, +\infty[$.

Exercice 1

① $y''_n(t) + y_n(t) = \cos(nt) \quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad (1).$

L'équation (1) est une edo du 2nd ordre à coeficients constants, non homogène.
L'équation homogène associé est : $y''_n(t) + y_n(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
Elle admet pour équation caractéristique : $x^2 + 1 = 0$
dont les racines sont i et $-i$.
L'équation homogène admet donc pour solutions:

$$y_h : t \longrightarrow C_1 \cos t + C_2 \sin t, \qquad (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Recherchons une solution particulière de l'edo (1).

Méthode 1

Le second membre est de la forme $f(t) = P(t) \cos(\delta t)$
où $P \in \mathbb{R}[x]$ est le polynôme constant égal à 1 et $\delta = n$
Si $i\delta$ est racine de l'equ. caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $y_p(t) = A(t) \cos(\delta t) + A_2^1(t) \sin(\delta t)$
où $A_i \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(A_i) \leq \deg(P) + 1 = 1$.
Si $i\delta$ n'est pas racine de l'équ. caractéristique, on cherche une solution particulière de la forme $y_p(t) = A_1(t) \cos(\delta t) + A_2(t) \sin(\delta t)$
où $A_i \in \mathbb{R}[X]$ $\deg(A_i) \leq \deg(P) = 0$.

Il y a donc 2 cas à envisager :
Si $n = 1$: on cherche une solution particulière de la forme

$$y_p(t) = (a_1 t + b_1) \cos(t) + (a_2 t + b_2) \sin(t).$$

On a :

$$y_p'(t) = a_1 \cos(t) - (a_1 t + b_1) \sin(t) + a_2 \sin(t) + (a_2 t + b_2) \cos(t)$$

$$y_p''(t) = -a_1 \sin(t) - a_1 \sin(t) - (a_1 t + b_1) \cos(t) + a_2 \cos(t) + a_2 \cos(t) - (a_2 t + b_2) \sin(t).$$

Stéphane BALAC

On en déduit que :

$$y_p''(t) + y_p(t) = \cos t\left[\cancel{a_1 t} + \cancel{b_1} - \cancel{a_1 t} - \cancel{b_1} + a_2 + a_2\right]$$
$$+ \sin t\left[\cancel{a_2 t} + \cancel{b_2} - a_1 - a_1 - \cancel{a_2 t} - \cancel{b_2}\right].$$

donc y_p est solution de l'edo (1) si

$$\begin{cases} 2a_2 = 1 \\ 2a_1 = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a_2 = 1/2 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

D'où des solutions particulières de la forme :

$$t \in \mathbb{R} \longrightarrow k_1 \cos(t) + k_2 \sin(t) + \frac{t}{2}\sin(t).$$

On retient la plus simple de ces solutions particulières :
$y_p : t \longrightarrow \frac{t}{2}\sin(t)$.

si $n \neq 1$: on cherche une solution particulière de la forme : $y_p(t) = a_1 \cos(nt) + a_2 \sin(nt)$

On a :

$$y_p'(t) = -n a_1 \sin(nt) + n a_2 \cos(nt)$$
$$y_p''(t) = -n^2 a_1 \cos(nt) - n^2 a_2 \sin(nt)$$

On en déduit que :

$$y_p''(t) + y_p(t) = a_1(1-n^2)\cos(nt) + a_2(1-n^2)\sin(nt)$$

donc y_p est solution de l'edo (1) si

$$\begin{cases} a_1(1-n^2) = 1 \\ a_2\underbrace{(1-n^2)}_{\neq 0} = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{1-n^2} \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

D'où des solutions particulières de la forme :

$$y_p : t \longrightarrow \frac{1}{1-n^2}\cos(nt)$$

Méthode 2 : variation de la constante

On cherche une solution particulière de la forme :

$$y_p(t) = \lambda_1(t)\cos(t) + \lambda_2(t)\sin(t)$$

où $\begin{cases} \lambda_1'(t)\cos(t) + \lambda_2'(t)\sin(t) = 0 \\ -\lambda_1'(t)\sin(t) + \lambda_2'(t)\cos(t) = \cos(nt) \end{cases}$

On multiplie la 1ère par $\sin(t)$ et la seconde par $\cos(t)$ et on somme. Il vient :

$$\begin{aligned}\lambda_2'(t) &= \cos(t)\cos(nt) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\cos((n+1)t) + \cos((n-1)t)\right\}\end{aligned}$$

Si $n=1$ on a $\lambda_2'(t) = \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}$

d'où $\lambda_2(t) = \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{t}{2}$

(les constantes de primitivation ne nous intéressent pas : on cherche une solution particulière)

Si $n \neq 1$ on a $\lambda_2(t) = \frac{1}{2(n+1)}\sin((n+1)t) + \frac{1}{2(n-1)}\sin((n-1)t)$

(le cas $n=0$ étant inclus)

Par ailleurs, $\lambda_1'(t) = -\cos(nt)\sin(t)$

$$= \frac{1}{2}\sin((n-1)t) - \frac{1}{2}\sin((n+1)t)$$

Si $n=1$ on a $\lambda_1'(t) = -\frac{1}{2}\sin(2t)$

d'où $\lambda_1(t) = \frac{1}{4}\cos(2t)$

Stéphane BALAC

si $n \neq 1$ on a $\lambda_1(t) = -\frac{1}{2(n-1)} \cos((n-1)t) + \frac{1}{2(n+1)} \cos((n+1)t)$

Finalement une solution particulière a pour expression :

si $n = 1$: $y_p(t) = \frac{1}{4} \cos(t) \cos(2t) + \frac{1}{4} \sin(t) \sin(2t) + \frac{t}{2} \sin(t)$

$$= \frac{t}{2} \sin(t) + \frac{1}{4} \cos(t)$$

si $n \neq 1$: $y_p(t) = -\frac{1}{2(n-1)} \cos(t) \cos((n-1)t)$

$$+ \frac{1}{2(n+1)} \cos(t) \cos((n+1)t) + \frac{1}{2(n+1)} \sin((n+1)t) \sin(t)$$

$$+ \frac{1}{2(n-1)} \sin((n-1)t) \sin(t)$$

$$= -\frac{1}{2(n-1)} \cos(nt) + \frac{1}{2(n+1)} \cos(nt)$$

$$= \cos(nt) \left\{ \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n-1)} \right\} = \frac{1}{1-n^2} \cos(nt).$$

Les solutions de l'équation (1) sont toutes les fonctions de la forme :

$$y : t \in \mathbb{R} \longrightarrow C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) + y_p(t)$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Stéphane BALAC

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : t \in \mathbb{R} \to a_n \cos(nt)$.
Cette application est continue
Par ailleurs, $\sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t)| = |a_n|$

Comme la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ converge, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.
D'après les résultats du cours, on peut en conclure que la somme de la série $\sum f_n$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

3). Le principe de superposition nous suggère de considérer pour solution la fonction :

$$g : t \in \mathbb{R} \to C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) + \sum_{n=0}^{+\infty} y_p(t).$$

Toutefois, on ne peut rien conclure car le principe de superposition s'applique pour une somme finie au second membre, non pour une série.

D'après la question 1), on a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g(t) = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) + a_0 + a_1 \frac{t}{2} \sin(t) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{1-n^2} \cos(nt)$$

Montrons que g vérifie l'équation (1), c'est à dire que
$g''(t) + g(t) = f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
La difficulté réside dans la série présente dans l'expression de g.

Soit $\phi_n : t \in \mathbb{R} \to \dfrac{a_n}{1-n^2} \cos(nt) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 2$.

Les ϕ_n sont clairement de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (elles sont C^∞)
Par ailleurs, $\sum_{n\geq 2} \phi_n(0) = \sum_{n \geq 2} \dfrac{a_n}{1-n^2}$

or $\left|\frac{a_n}{1-n^2}\right| \underset{+\infty}{\sim} \frac{|a_n|}{n^2}$ et $\sum \frac{|a_n|}{n^2}$ cv car

comme $\sum_n |a_n|$ cv $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$ donc $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$n \geq N \Rightarrow |a_n| \leq 1.$$

On a donc $\frac{|a_n|}{n^2} < \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq N$

et on conclut en invoquant les critères de comparaison pour les séries numériques à termes positifs.

On a $\phi_n'(t) = -\frac{a_n}{1-n^2}\, n \sin(nt)$

or $\sup_{t\in\mathbb{R}} |\phi_n'(t)| \leq |a_n| \frac{n}{1-n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{|a_n|}{n}$.

et $\sum \frac{|a_n|}{n}$ converge car $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{|a_n|}{n} < |a_n|$ et $\sum |a_n|$ cv

donc la série $\sum \phi_n'(t)$ cv uniformément sur $\mathbb{R}$.
On en déduit que $\sum \phi_n$ cv vers une application C^1 sur $\mathbb{R}$ et

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(t)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n'(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1-n^2}\, n \sin(nt)$$

On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$g'(t) = -C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t) + \frac{a_1}{2}\sin(t) + \frac{a_1}{2} t \cos(t) + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n^2-1}\, n \sin(nt)\right]$$

et g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Il faut ensuite calculer g'' en considérant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$\psi_n : t \in \mathbb{R} \longrightarrow \frac{n\, a_n}{n^2-1} \sin(nt)$

Les ψ_n sont clairement de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$\sum\limits_{n\geq 2} \psi_n(0) = 0$ converge.

on a $\forall t \in \mathbb{R}$ $\quad \psi_n'(t) = \dfrac{n^2}{n^2-1} a_n \cos(nt)$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\psi_n'(t)| \leq \frac{n^2}{n^2-1}|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |a_n|$$

Comme $\sum |a_n|$ cv, $\sum \psi_n'(t)$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$g''(t) = -C_1 \cos(t) - C_2 \sin(t) + a_1 \cos(t) - \frac{a_1}{2} t \sin(t) + \sum_{n=2}^{+\infty}\left[\frac{n^2}{n^2-1} a_n \cos(nt)\right]$$

et g' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc g est de classe C^2.

Calculons $g''(t) + g(t)$.

On a :

$$\begin{aligned} g''(t)+g(t) &= \cancel{-C_1\cos(t)} \cancel{- C_2 \sin(t)} + a_1\cos(t) \cancel{- \frac{a_1}{2} t \sin(t)} \\ &+ \sum_{n=2}^{+\infty}\left[\frac{n^2}{n^2-1} a_n\cos(nt)\right] + \cancel{C_1\cos(t)} + \cancel{C_2\sin(t)} + a_0 \\ &+ \cancel{a_1 \frac{t}{2}\sin(t)} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{1-n^2}\cos(nt) \\ &= a_0 + a_1\cos(t) + \sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{\left[\frac{n^2}{n^2-1} + \frac{1}{1-n^2}\right]}_{=1} a_n \cos(nt) \\ &= a_0 + a_1 \cos(t) + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n\cos(nt) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nt) \\ &= f(t). \end{aligned}$$

g est donc bien solution de l'équation (4).

Exercice 2

1) On a $\ln(1+t^2) \underset{0}{\sim} t^2$ donc la fonction $f : t \to \frac{\ln(t^2+1)}{t}$ est prolongeable en 0 en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant $f(0) = 0$.
F est donc l'intégrale indéfinie d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (donc Rieman intégrable). F est définie sur $\mathbb{R}$.
De plus, la continuité de f sur $\mathbb{R}$ nous assure la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}$ (voir cours d'intégration de 1e année).

2). Sur $]-1,1[$ on a $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ (voir cours)
On en déduit que formellement on a :

$$f(t) = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^{2n}}{n}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+1}}{n}.$$

On a une série entière
Notons $a_n = (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+1}}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

On a $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = t^2 \frac{n}{n+1}$ d'où $\lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = t^2$

Le critère de d'Alembert pour les séries numériques nous indique que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n$ cv absolument pour tout $t \in]-1,1[$.
On peut en déduire que le rayon de cv de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+1}}{n}$ vaut $R = 1$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $f_n : t \in]-1,1[\longrightarrow (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+1}}{n}$
Ces fonctions sont clairement continues.
Une série entière est normalement et uniformément cv dans toute boule fermée de centre 0 de rayon $\rho < R$.
On en déduit que $\forall x \in]-1,1[$ $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(t)$ cv uniformément vers f sur $[0, x]$

Le calcul suivant est alors justifié (cf thm de permut. de $\sum$ et $\int$ en cours) :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^{2n-1}\,dt$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \int_0^x t^{2n-1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left[\frac{1}{2n} t^{2n}\right]_0^x$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2} x^{2n}.$$

Rem : La série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge en 1 et -1 puisque :

$$f_n(1) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$f_n(-1) = \frac{(-1)^{3n+2}}{n} = \frac{(-1)^n}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

et $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ sont deux séries alternées qui convergent (exemple traité en cours).

3) a) $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$ est une série entière dont il est aisé de montrer que le rayon de convergence est $R = 1$. Cette série entière converge en 1 et -1.

Toutefois, la convergence normale et uniforme d'une série entière n'est assurée que dans toute boule fermée de centre 0 et de rayon $\rho < R$. On ne peut donc conclure à la cv uniforme de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$ sur $[0,1]$ par cet argument.

Clairement : $\sup_{x\in[0,1]} |F_n(x)| = \frac{1}{2n^2} \sup_{x\in[0,1]} x^{2n} = \frac{1}{2n^2}$.

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{2n^2}$ est une série de Riemann convergente.

On en conclut que $\sum F_n$ cv normalement et donc uniformement sur $[0,1]$

<u>Rem:</u> critère d'Abel "uniforme" pour les séries alternés :
Soit $\alpha_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{2n^2}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall x \in [0,1]$.

La suite $(\alpha_n(x))_n$ est positive $\forall x \in [0,1]$.
$\forall x \in]0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\frac{\alpha_{n+1}(x)}{\alpha_n(x)} = x^2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1 \quad \text{car } 0 \leq x^2 \leq 1 \text{ et } 0 \leq \frac{n}{n+1} < 1$$

La suite $(\alpha_n(x))_n$ est donc strictement decroissante $\forall x \in]0,1]$.
Pour $x = 0$, on a la suite nulle

$$\sup_{x \in [0,1]} |\alpha_n(x)| = \frac{1}{2n^2} \sup_{x \in [0,1]} x^{2n} = \frac{1}{2n^2}.$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2n^2} = 0$ donc la suite $(\alpha_n(x))_n$ cv unif.

sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.
Le critère d'Abel permet donc de conclure que $\sum\limits_{n \geq 1} F_n$ converge uniformement sur $[0,1]$ (mais on remarquera qu'il ne s'agit pas, et de loin, la méthode idoine ici).

b) On a $$\int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)}{t}\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt = F(1)$$

et $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(1)$$

mais d'après la question 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} F_n(x) = F(x)$ pour $x \in]-1,1[$
donc on ne peut prendre $x = 1$.
D'après la question 3 a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} F_n(x)$ converge bien en $x = 1$ mais ce pourrait être vers autre chose que $F(1)$.

Sur $[0,1]$ F_n est continue $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$ cv uniformement sur $[0,1]$.
Il résulte des thm du cours que la somme de cette série est une fonction continue sur $[0,1]$.
Or d'après la question 2, cette somme est la fonction F sur $[0,1[$. Comme F est continue sur $[0,1]$ (sur $\mathbb{R}$, voir la question 1)) on a bien $F(1) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} F_n(1)$.

4). $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2}$ est une serie alternée avec $\alpha_n = \frac{1}{2n^2}$ qui est le terme general d'une suite qui decroit vers 0.

Il resulte des thm du cours que la série cv (mais on le savait déjà !) et que le reste d'ordre p est inferieur à α_{p+1} $\forall p \in \mathbb{N}$ ie :

$$|R_p| = \left|\sum_{n=p+1}^{\infty} (-1)^n \alpha_n\right| < \alpha_{p+1}.$$

Dans notre cas, on obtient :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)}{t}\,dt = F(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} F_n(1)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2} + \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2}$$

et

$$\left|\int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)}{t}\,dt - \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2}\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2}\right| < \frac{1}{2(N+1)^2}.$$

Pour avoir $\frac{1}{2(N+1)^2} \leq 10^{-2}$, il faut :

$$(N+1)^2 \geq 50 \quad \text{soit} \quad N \geq \sqrt{50} - 1 = (\sqrt{49+1} - 1)$$

ie : $N = 7$.

On a alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t^2)}{t}\,dt \simeq \sum_{n=1}^{7} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^2}$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{18} - \frac{1}{32} + \frac{1}{50} - \frac{1}{72} + \frac{1}{98}.$$

Stéphane BALAC

Problème :

1) $g : x \in]1, +\infty[\longrightarrow \dfrac{\ln x}{x-1}$ est $C^\infty(]1,+\infty[)$.

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ g'(x) = \frac{1/x \cdot (x-1) - \ln x}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{x(x-1)} - \frac{\ln(x)}{(x-1)^2} = \frac{1}{x(x-1)^2}\left(x-1-x\ln(x)\right)$$

Le signe de g' dépend du signe de $x-1-x\ln(x)$

Soit $h : x \in]1,+\infty[\longrightarrow x-1-x\ln(x)$

$$\forall x \in]1,+\infty[\quad h'(x) = 1-\ln(x)-1 = -\ln(x)$$

On obtient alors le tableau de variation suivant pour g.

x	1		$+\infty$
$h'(x)$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$
$g'(x)$		$-$	
$g(x)$	1	$\searrow$	0

$g(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(x)}{x}$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

g est décroissante sur $]1,+\infty[$, continue sur $]1,+\infty[$

et $\forall x \in]1,+\infty[\quad 0 < g(x) < 1$ (donc g est bornée)

2) Pour $x > 1$, on a $x^n > n^2$ pour n assez grand
On en déduit que : $\forall x \in]1,+\infty[\quad \forall n \geq 2$

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{\ln x}{n^2 \ln(n)}.$$

Or $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln(n)}$ est une série numérique convergente (série de Bertrand).
Les critères de comparaison pour les séries numériques positives permettent de conclure que $\sum f_n(x)$ CV pour $x > 1$.

On peut aussi établir ce résultat en utilisant le critère de D'Alembert :

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{1}{x} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}$$ tend vers $\frac{1}{x}$.
et $\forall x \in]1,+\infty[$, $\frac{1}{x} < 1$.

Par ailleurs, en $x = 1$ on a la série nulle : il y a cv.

3) $$\sup_{x \in [a,+\infty[} |f_n(x)| = \frac{1}{\ln(n)} \sup_{x \in [a,+\infty[} \left| \frac{\ln x}{x^n} \right|$$

Soit $\psi_n : x \in [a,+\infty[\longrightarrow \frac{\ln x}{x^n}$.

$$\psi_n'(x) = \frac{x^{n-1} - n x^{n-1} \ln(x)}{x^{2n}}$$

$$= \frac{1 - n \ln(x)}{x^{n+1}}$$

$\psi_n'(x) = 0 \iff \ln(x) = 1/n$
$\iff x = e^{1/n}$

x	1		$e^{1/n}$		$+\infty$
$\psi_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$\psi_n(x)$	0	↗	$\frac{1}{en}$	↘	0

$$\psi_n(e^{1/n}) = \frac{1}{n} \cdot (e^{1/n})^{-n}$$
$$= \frac{1}{en}$$

Pour n assez grand $e^{1/n} < a$ car $\lim_{n\to+\infty} e^{1/n} = 1$.
($n > 1/\ln(a)$)
donc pour $n \geq E(1/\ln(a))$ on a :

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| = \frac{1}{\ln(n)} \varphi_n(a) = \frac{\ln(a)}{a^n \ln(n)} = f_n(a).$$

or $\sum f_n(a)$ cv (voir quest. 2).
On en deduit que $\sum f_n$ cv normalement sur $[a,+\infty[$ pour tout $a > 1$.

4) $$R_N(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}.$$

Comme ln est croissante, $\ln(n) > \ln(N+1)$ $\forall n \geq N+1$.
On en déduit que

$$0 \leq R_N(x) \leq \frac{1}{\ln(N+1)} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = \frac{\ln(x)}{\ln(N+1)} \sum_{n=N+1}^{\infty} 1/x^n.$$

or $$\sum_{n=N+1}^{\infty} 1/x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x^n} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{x^n}$$ (serie geometrique de raison $1/x$)

$$= \frac{1}{1-1/x} - \frac{1-(1/x)^{N+1}}{1-1/x}$$

$$= \frac{x}{x-1} - \frac{x^{N+1}-1}{x^{N+1}-x^N}$$

$$= \frac{1}{x-1}\left(x - \frac{x^{N+1}-1}{x^N}\right)$$

$$= \frac{1}{x^N(x-1)}.$$

On a donc :

$$R_N(x) \leq \frac{\ln(x)}{\ln(N+1)} \cdot \frac{1}{x^N(x-1)} = g(x) \cdot \frac{1}{x^N \ln(N+1)}$$

g est majorée par 1 cf question préliminaire
d'où pour tout $x \geq 1$ on a :

$$0 \leq R_N(x) \leq \frac{1}{\ln(N+1)}$$

$\forall n \geq 2$, f_n est continue sur $[1, +\infty[$.

La série $\sum f_n$ converge uniformement vers f sur $[1, +\infty[$
d'après la definition :
$\sum f_n$ cv uniformement sur $[1, +\infty[$ vers f
si la suite des sommes partielles converge uniforment
vers f sur $[1, +\infty[$.

Or $\sup_{x \in [1,+\infty[} \left| \sum_{n=1}^{N} f_n(x) - f(x) \right| = \sup_{x \in [1,+\infty[} |R_N(x)|$
$\leq \frac{1}{\ln(N+1)}$

et $\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{\ln(N+1)} = 0$.

On en conclut que f est bien continue sur $[1, +\infty[$.

5) On a $f_n' : x \in]1, +\infty[\longrightarrow \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}\ln(n)}$

. $\forall n \geq 2$ f_n est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$
. $\sum f_n$ converge simplement sur $]1, +\infty[$.
. Montrons que $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$
où $a > 1$.

$$\sup_{x \in [a,+\infty[} |f_n'(x)| = \frac{1}{\ln(n)} \sup_{x \in [a,+\infty[} \left| \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}} \right|$$

Soit $h : x \in [1, +\infty[\rightarrow \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}}$

$$h'(x) = \frac{-n\,x^n - (n+1)\,x^n\,(1 - n\ln(x))}{x^{2n+2}} = \frac{-2(n+1) + n(n+1)\ln x}{x^{n+2}}$$

$$h'(x) = 0 \iff \ln(x) = \frac{2(n+1)}{n(n+1)} = \frac{2}{n}$$

$$\iff x = e^{2/n}$$

x	1		$e^{2/n}$		$+\infty$
h'		$-$	0	$+$	
h	1	$\searrow$	$h(e^{2/n})$	$\nearrow$	0

On a $h(e^{2/n}) = \dfrac{1 - n.\ln(e^{2/n})}{(e^{2/n})^{n+1}} = -\dfrac{1}{e^{2(n+1)/n}}$

On en deduit que $\sup\limits_{x \in [1,+\infty[} |h(x)| = 1$

Comme $\sum\limits_{n \geq 2} \dfrac{1}{\ln(n)}$ DV, la serie $\sum\limits_{n \geq 1} f_n'(x)$ ne converge pas normalement sur $[1,+\infty[$.

Par contre $\sup\limits_{x \in [a,+\infty[} |h(x)| = |h(a)|$ pour n assez grand
(n t.q. $e^{2/n} < a$ ie: $n > 2/\ln(a)$)

d'où $\sup\limits_{x \in [a,+\infty[} |f_n'(x)| = \dfrac{1}{\ln(n)} |h(a)| = \dfrac{n\ln(a) - 1}{a^{n+1}\ln(n)}$

or $\dfrac{n\ln(a) - 1}{a^{n+1}\ln(n)} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{n\ln(a)}{a^{n+1}\ln(n)}$

Notons $u_n = \dfrac{n\ln(a)}{a^{n+1}\ln(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$

On a $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{na} \cdot \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}$ tend vers $\frac{1}{a}$.

Donc pour $a > 1$, le critère de d'Alembert pour les séries numériques assure que $\sum u_n$ cv donc que $\sum f_n'$ cv normalement sur $[a, +\infty[$.

On peut conclure d'après les résultats du cours que f est C^1 sur $[a, +\infty[$ $\forall a \in]1, +\infty[$ et que $f'(x) = \sum_{n \geq 2} f_n'(x)$ $\forall x \in]a, +\infty[$.

Comme f est C^1 sur $[a, +\infty[$ $\forall a \in]1, +\infty[$, f est C^1 sur $]1, +\infty[$.

6). f est dérivable sur $[e, +\infty[$ (car $e > 1$) et $\forall x \in [e, +\infty[$ on a :

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1 - n\ln(x)}{x^{n+1}\ln(n)}.$$

Pour $x \geq e$ on a $\ln(x) \geq 1$ d'où $1 - n\ln(x) < 0$

On en déduit que $\forall x \in [e, +\infty[$, $f_n'(x) < 0$.

La somme d'une série à termes négatifs étant négative, $f'(x) < 0$ $\forall x \in [e, +\infty[$.

f est donc décroissante sur $[e, +\infty[$, strictement.

7) $\forall x \in [1, +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ on a

$$0 \leq f_n(x) = \frac{\ln(x)}{x^n \ln(n)} \leq \frac{\ln(x)}{x^n \ln(2)}$$

On en deduit que :

$$0 \leq \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(x) \leq \frac{\ln(x)}{\ln(2)} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{x^n}$$

Or $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1-1/x} = \frac{1}{x(x-1)}$

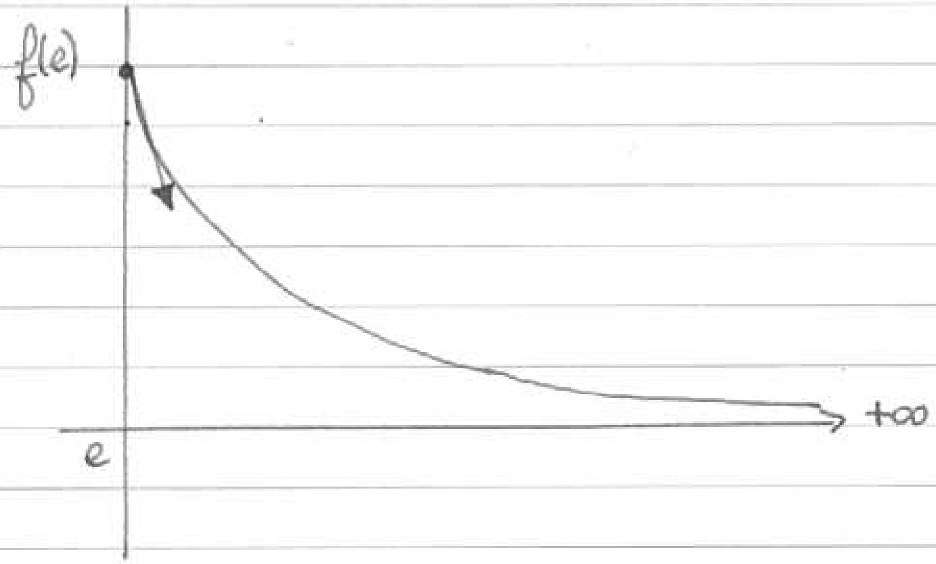
(somme d'une progression géométrique de raison $1/x$).

donc $\displaystyle 0 \leq f(x) \leq \frac{\ln(x)}{x(x-1)\ln(2)} = \frac{g(x)}{x\ln(2)}$

On a $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

d'après le théorème d'encadrement.

8).



$\displaystyle f(e) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n(e) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{e^n \ln(n)}$

On a $\displaystyle 0 \leq f(e) \leq g(e) \cdot \frac{1}{e\ln(2)} = \frac{1}{e(e-1)\ln(2)}$

$\displaystyle f'(e) = \sum_{n=2}^{+\infty} f_n'(e) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1-n}{e^{n+1}\ln(n)}$