

Exercice 1 (Fonctions implicites : 5 points)

On considère la surface (S) d'équation : $\ln(x+y-z) + x^2 - y + 2z = 1$.
Montrer qu'au voisinage du point A de coordonnées (1,0,0), (S) admet une représentation cartésienne de la forme $z = \phi(x, y)$. Montrer que ϕ est de classe C^2 au voisinage de (1,0).
Ecrire le développement de Taylor-Young de ϕ à l'ordre 2 en (1,0).
Ecrire l'équation du plan tangent à (S) au point A et préciser la position de la surface par rapport à son plan tangent en A.

Exercice 2 (Surfaces et calcul intégral : 11 points)

On considère la courbe (γ) du plan (xOy) rapporté à un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$)

$$\text{de représentation paramétrique donnée par } \begin{cases} x = t(1-t) \\ y = \frac{t^2}{2} \end{cases}, t \in [0,1].$$

1. 1.1. Calculer les coordonnées des points de paramètres $t = 0, \frac{1}{2}$ et 1 et préciser les vecteurs tangents aux points correspondants. Tracer la courbe (γ) en faisant apparaître ces 3 points et les tangentes.
- 1.2. Donner l'équation implicite de (γ).
2. Calculer à l'aide de la formule de Green-Riemann l'aire du domaine du plan (xOy) limité par (γ) et l'axe (Oy).
3. Dans l'espace euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la surface (Σ) obtenue en faisant tourner la courbe (γ) du plan (xOy) autour de l'axe (Oy). Donner une représentation paramétrique de (Σ).

4. Exprimer l'aire de (Σ) à l'aide d'une intégrale simple qu'on ne cherchera pas à calculer.

5. 5.1 Calculer le volume V du domaine (D) limité par (Σ).

- 5.2. On approche (D) par une demi-sphère et un tronc de cône (voir figure 1).

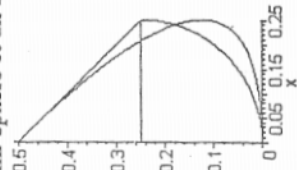


Figure 1

- Calculer le volume V' du domaine (D') ainsi défini.
- 5.3. Commenter la précision de l'approximation de V donnée par V' .

6. Soit $G(x_G, y_G, z_G)$, le centre de gravité du solide (D) supposé homogène. Pourquoi a-t-on $x_G = 0$ et $z_G = 0$?

On a $y_G = \frac{1}{V} \iiint_D y \, dx \, dy \, dz$.

Calculer $\iiint_D y \, dx \, dy \, dz$ à l'aide de la formule d'Ostrogradski appliquée au champ de vecteurs $\vec{W} = y^2 \vec{j}$ et en déduire y_G .

7. Soit (Γ) la courbe de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t(1-t) \cos(\pi t) \\ y = \frac{t^2}{2} \\ z = t(1-t) \sin(\pi t) \end{cases}, t \in [0,1].$

- 7.1. Montrer que la courbe (Γ) est inscrite sur la surface (Σ).

- 7.2. Calculer le flux du vecteur $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ à travers la portion (Σ_1) de (Σ) limitée par (Γ) et (γ). (voir figure 2 pour une vue de (Σ_1))

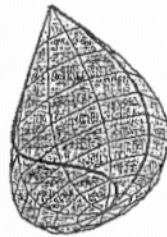


Figure 2

Exercice 3 (Extrémum : 4 points)

Un (vrai) pentagone est constitué d'un rectangle et deux triangles identiques (voir figure 3). Comment faut-il choisir a, b et h pour minimiser le périmètre p tout en gardant l'aire du pentagone constante ? (on admettra que le problème posé a une solution)

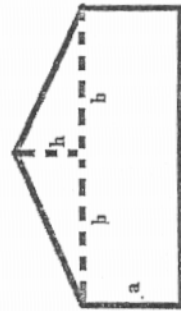


Figure 3

Exercice 1. Fonctions implicites

-2002

$$z = \phi(x, y) \quad T_{(0,0)} + \frac{\partial \phi}{\partial z}(0,0) = 1 \neq 0$$

$$\phi = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix} \quad T_{(0,0)} + \frac{\partial \phi}{\partial z}(0,0) = 1 \neq 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1 + 2x^2 + 2xy - 2z^2}{x + y - z} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 3$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1 - x - y + z}{x + y - z} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial z} = -\frac{1 + 2x^2 + 2xy - 2z^2}{2x + 1y - 2z - 1} = -\frac{N_1}{D} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x}(0,0) = -3 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= -\frac{\partial F / \partial y}{\partial F / \partial z} = -\frac{1 - x - y + z}{2x + 1y - 2z - 1} = -\frac{N_2}{D} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(0,0) = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -\frac{4x + 2y - 2z \frac{\partial \phi}{\partial x}}{D^2} + \frac{N_1}{D^2} (2 - 2 \frac{\partial \phi}{\partial x}) = 4$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\frac{1 + \frac{\partial \phi}{\partial x}}{D} + \frac{N_2}{D} (2 - 2 \frac{\partial \phi}{\partial x}) = 4$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -\frac{1 + \frac{\partial \phi}{\partial y}}{D} + \frac{N_2}{D} (2 - 2 \frac{\partial \phi}{\partial y}) = 4$$

$$T : z = -3(x-1)$$

$$\phi(x,y) = 0 - 3(x-1) + 4(x-1)y + \frac{y^2}{2} + \dots$$

$$d\phi(1,0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad T_x d\phi > 0 \rightarrow \lambda_1 > 0$$

Tangent plan T traverse l'ensemble $\phi(x,y)$.

Exercice 2. Surfaces et calcul integral.

$$x = t(1-t) \quad t \in [0,1]$$

$$y = t^2/2$$

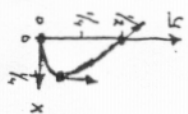
$$T(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ t^2/2 \end{pmatrix}$$

$$t=0 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t=\frac{1}{2} \quad \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1/8 \end{pmatrix} \quad T(1/2) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1/8 \end{pmatrix}$$

$$t=1 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad T(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} x - \sqrt{1-x} (1-t^2/2) = 0$$



$$2. \quad \Pi_{\text{plan-Riemann}} \left\{ \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} dy + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} dz \right\}$$

$$\text{chose } g = x, P = 0$$

$$1. \quad \oint x dy = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

$$3 \quad \mathcal{E} : \left(\frac{y}{z} \right) = \left(\frac{t^2(1-t) \cos(\varphi)}{t^2(1-t) \sin(\varphi)} \right) \quad \begin{matrix} t \in [0,1] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{matrix}$$

$$4 \quad \text{Elim. } \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi} = 0 \quad \left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi} \right| = \frac{2t}{\sin^2 \varphi} \quad \text{not } \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = 0$$

$$\left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varphi} \right| = t(1-t) \sqrt{1-t^2} \sin^3 \varphi$$

$$A_{\mathcal{E}} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 t(1-t) \sqrt{1-t^2} \sin^3 \varphi \, d\varphi \, dt = 2\pi \int_0^1 t(1-t) \sqrt{1-t^2} \sin^2 \varphi \, dt$$

$$5.1 \quad \mathcal{V}_{\mathcal{E}} = \iint_{\mathcal{E}} dx dy dz = \pi \int_0^1 z^2 dy \cdot dy = \pi \int_0^1 t^3 (1-t)^2 \, dt = \pi \int_0^1 (t^3 - 2t^4 + t^5) \, dt = \pi \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{60}$$

$$5.2 \quad \mathcal{V}' = \mathcal{V}_S + \mathcal{V}_C \quad \mathcal{V}_S = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{\pi}{16}$$

$$\mathcal{V}_C = \pi \int_0^1 \int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{4}} x^2(y) \, dy \quad x = \left(\frac{1}{4} - y \right) = \pi \int_0^1 \left(\frac{1}{16} - \frac{y}{2} + y^2 \right) dy = \frac{\pi}{192}$$

$$\mathcal{V}' = \mathcal{V}_S + \mathcal{V}_C = \frac{\pi}{64}$$

5.3 $\mathcal{V}'_2 \mathcal{V}$ as the approximation over Kunder estimates, which cancel approximately.

6. $x_0 = z_0 = 0$ because of the rotational symmetry

Th. Obergastik. $\iint_{\mathcal{E}} y dx dy dz = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{E}} (x^2 + y^2) \, d\sigma$

$$\vec{n} = \left(\frac{x^2(1-t) \cos(\varphi)}{t^2(1-t) \sin(\varphi)} \right) \quad \mathcal{E} = 1 \, t$$

$$\frac{1}{2} \iint_{\mathcal{E}} (\vec{\omega} \cdot \vec{n}) \, d\sigma = \iint_{\mathcal{E}} \frac{t^4}{8} (1-t)(1-t^2) \, d\varphi \, dt$$

$$= \frac{\pi}{8} \left[-\frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right) \right] = \frac{\pi}{192} \quad \left(\int_0^1 (\vec{\omega} \cdot \vec{n}) \, d\sigma = \frac{\pi}{192} \right)$$

$$y_G = \frac{\pi}{192} \cdot \frac{60}{\pi} = \frac{5}{32} = \frac{5}{32} \approx 0.15$$

Logical that $y_G \leq 1/4$.

$$7.1 \quad \left(\frac{x}{y} \right)_{\mathcal{E}}^2 \leq \text{constitute} : x_1^2 + z_1^2 = t^2(1-t)^2 = x_2^2 + z_2^2, t^2(1-t)^2$$

$$7.2 \quad (\vec{n} \cdot \vec{\omega}) = \begin{pmatrix} \frac{t^2(1-t) \cos(\varphi)}{t^2(1-t) \sin(\varphi)} \cdot \left(\frac{t^2}{2} \right) \\ \frac{t^2(1-t) \sin(\varphi)}{t^2(1-t) \sin(\varphi)} \cdot \left(\frac{t^2}{2} \right) \end{pmatrix}$$

$$= t^2(1-t)^2 \cdot \frac{1}{2} (1-t)^2 = t^2/2 = t^2/2$$

$$\mathcal{E}_1 : \left(\frac{y}{z} \right) = \left(\frac{t^2(1-t) \cos(\varphi)}{t^2(1-t) \sin(\varphi)} \right) \quad 0 \leq \varphi \leq \pi t$$

$$\mathcal{V}_{\mathcal{E}_1} = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\pi t} [t^3 - t^4] \, d\varphi \, dt$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 (t^3 - t^4) \, dt = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{\pi}{20}$$

Exercise 8. Extremum.

$$\text{circumference } f: 2a+2b+2\sqrt{b^2+h^2}$$

$$\text{surface } g: 2ab+2b = \text{const.}$$

$$\text{minimize Lagrange } \vec{g} \vec{g} = \lambda \vec{g} \vec{g}$$

$$\left(2 + \frac{2b}{2h\sqrt{b^2+h^2}} \right) = \lambda \left(\frac{2b}{b} \right)$$

$$1 \rightarrow \lambda = 1/b$$

$$3 \rightarrow 2h = \sqrt{b^2+h^2} \rightarrow b^2 = 3h^2 \rightarrow b = \sqrt{3}h \quad (\text{real})$$

$$3 \rightarrow 2a+2b + \frac{2}{\sqrt{3}}b \quad a=b(1+\sqrt{3})$$

$$\left. \begin{matrix} A_P = (2+\sqrt{3})b^2 \\ C_P = 2(2+\sqrt{3})b \end{matrix} \right\}$$