Devoir de synthèse de mathématiques

Les documents, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits
Les théorèmes utilisés seront énoncés avec précision

Exercice 1 (sur 6 points)

On se propose de déterminer, pour certaines matrices A, une matrice « racine carrée » de A, c'est à dire une matrice R telle que $R^2 = A$. On note O la matrice carrée nulle d'ordre n et I la matrice diagonale d'ordre n dont tous les éléments de la diagonale sont égaux à 1. On rappelle que tout sous ensemble fermé d'un espace vectoriel normé complet est complet.

I. Préliminaire : l'équation $R^2=A$ n'a pas nécessairement une solution, ni un nombre fini de solutions

Soit $S(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$. Calculer $S(t)^2$

En déduire qu'il existe un nombre infini de matrices R telles que $R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

II. Existence d'une solution et algorithme de calcul approché lorsque $0 < ||| A - I ||| < 1$

On munit l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre n d'une norme matricielle induite notée $|||M|||$. On se propose de montrer l'existence et de donner un procédé de calcul approché d'une « racine carrée » pour toute matrice A telle $0 < ||| A-I ||| < 1$. Soit f l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad f(X) = \frac{1}{2}(X^2 + I - A)$$

1.Etude d'un cas particulier

On suppose que la matrice A est égale à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$|||X||| < 1$
$|||f(x)||| = \frac{1}{2}|||X^2||| + |||I-A|||$

a. Vérifier qu'il existe une norme matricielle induite telle que $0 < ||| A - I ||| < 1$

b. Calculer $f(O)$, $f^2(O) = (f \circ f)(O)$ et $f^3(O) = (f \circ f \circ f)(O)$ Vérifier que la suite $(f^p(O))_{p \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice L et que la matrice $R = I - L$ est solution de $R^2 = A$.

2.On revient au cas général. A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle $0 < ||| A - I ||| < 1$
Soit $\mathcal{B}$, la boule fermée de l'espace vectoriel normé $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), ||| \, |||)$ de centre O et de rayon $r_A = ||| A - I |||$.

a. Vérifier que $f(\mathcal{B})$ est inclus dans $\mathcal{B}$.

b. Remarquer que $f(X) - f(Y) = \frac{1}{2}((X - Y)X + Y(X - Y))$ et montrer que f est contractante sur $\mathcal{B}$.

c. Montrer que la suite itérée, (M_p), définie par $M_1 = f(O)$ et pour $p \geq 1$ $M_p = f(M_{p-1})$, converge.

d. Soit L la limite de la suite (M_p), vérifier que la matrice $R = I - L$ est « racine carrée » de A.

e. Donner en fonction de l'entier p, un majorant de $||| R_p - R |||$ où $R_p = (I - M_p)$.

Problème (sur 10 points)

I Minimisation sous contrainte (question indépendante)

Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x,y,z) = (g_1(x,y,z), g_2(x,y,z))$ avec

$$g_1(x,y,z) = x^2 - y^2 z$$
$$g_2(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

1.1. On se propose de rechercher les points en lesquels $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \to f(x,y,z) = x^2$ peut admettre des extremums relatifs sous la contrainte $g(x,y,z)=(0,0) = 0_{\mathbb{R}2}$ (c'est à dire $g_1(x,y,z)= 0$ et $g_2(x,y,z)= 0$)

a. Vérifier que si l'une des coordonnées x, y ou z est nulle alors f atteint son minimum absolu

b. Appliquer la méthode des multiplicateurs de Lagrange sur l'ouvert $U= \mathbb{R}^{+*3}$ pour chercher les points de $\mathbb{R}^{+*3}$ en lesquels f peut admettre des extremums relatifs sous la contrainte $g(x,y,z)= (0,0)$. (On ne demande pas de préciser la nature des points trouvés).

II Etude d'une courbe

L'espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3 est rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la courbe Γ définie par $g(x,y,z)= (0,0)$, $y>0$ et $z>0$ et la portion Γ_1 de Γ définie par $x>0$.

2.1. Vérifier que Γ_1 admet pour représentation paramétrique (I,G_1)

$$I=[0,1] \qquad t\in I \qquad G_1(t)= \sqrt{t(1-t)}\,\vec{i} + \sqrt{1-t}\,\vec{j} + t\,\vec{k}$$

2.2. Déterminer le point A de Γ_1 de cote $z=\dfrac{1}{2}$ et un vecteur directeur de la tangente à Γ_1 en A.

2.3. Donner à partir des projections orthogonales de Γ_1 sur les plans de coordonnées (xOz) et (yOz), représentées ci-dessous (schéma 1), une construction point par point de la courbe Γ_1 (on placera en particulier le point A et sa tangente) puis représenter Γ.

2.4. Calculer la circulation du champ de vecteurs H_1 défini par $H_1(x,y,z)= y\,\vec{i} + \vec{j} + z\,\vec{k}$ sur Γ_1 en précisant le sens d'orientation choisi puis sur Γ.

III . Surface (voir schéma 2)

Soit S la surface d'équation implicite $x^2 - y^2 z = 0$.

3.1. a. Vérifier que tout point $M_0(x_0,y_0,z_0)$ de S qui n'appartient pas à l'axe (Oz) est régulier et donner une équation du plan tangent Π_0 en M_0 à S en fonction de x_0, y_0 et z_0.

b. Donner une représentation cartésienne des points de S qui n'appartiennent pas à l'axe (Oz) et en déduire la position de S par rapport à Π_0 au voisinage de M_0

3.2. Soit la surface Σ de représentation paramétrique (Ω,F) où :

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \qquad (u,v)\in \Omega \qquad F(u,v) = uv\,\vec{i} + v\,\vec{j} + u^2\,\vec{k}$$

a. Vérifier que la surface Σ est incluse dans la surface S.

b. Reconnaître la nature des courbes coordonnées Δ_{u_0} obtenues lorsque u est fixé égal à u_0. Vérifier que les courbes coordonnées Υ_{v_0} obtenues lorsque v est fixé égal à v_0 sont des courbes planes et en déterminer la nature.

3.3. On se propose de dessiner la portion Σ^* de la surface Σ intérieure à la sphère de centre O et de rayon 1 qui est situé dans la portion d'espace y strictement positif.

Donner une construction point par point des courbes coordonnées Δ_{u_0} pour $u_0=1$, $u_0=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $u_0=1$.

Représenter la courbe coordonnée Υ_{v_0} pour $v_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Par symétrie en déduire une représentation graphique de la surface Σ^*.

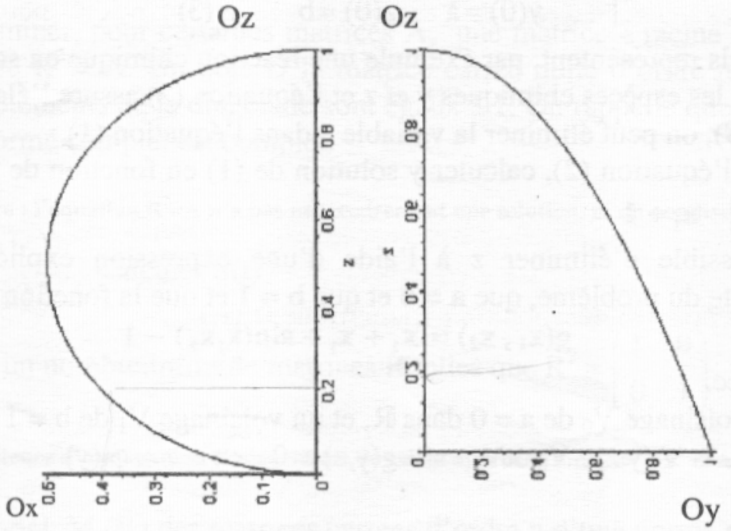
3.4.

Calculer directement le flux du champ de vecteurs $R = \mathrm{rot}(H) = -\vec{k}$ à travers la surface Σ^* en précisant l'orientation choisie

Comparer ce résultat à celui obtenu en 2.4. Expliquer.

schéma 1

courbe représentative de $x = \sqrt{z(1-z)}$ représentée dans le plan (xOz)

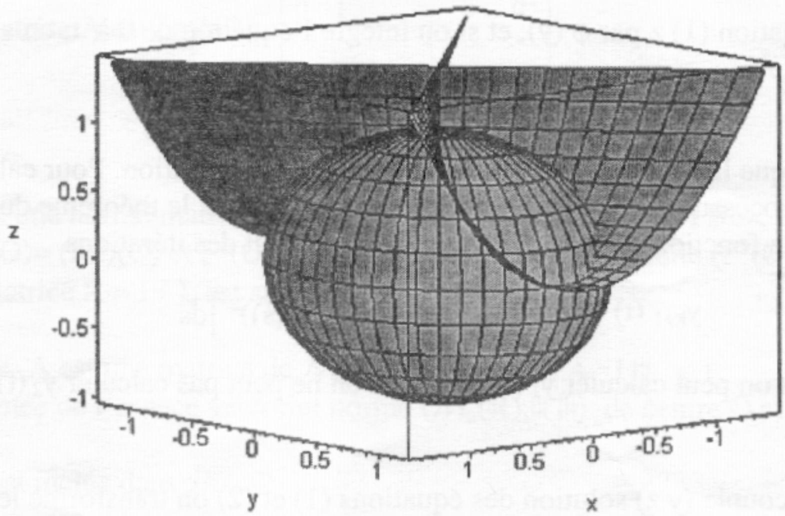


courbe représentative de $y = \sqrt{1-z}$ représentée dans le plan (yOz)

demi-cercle **arc de parabole**

projections orthogonales de Γ_1 sur les plans de coordonnées (xOz) et (yOz)

schéma 2



sphère de centre O et de rayon 1 et surface S représentées en coordonnées paramétriques avec le logiciel Maple

Exercice 2 (sur 4 points) : utilisation du théorème des fonctions implicites pour résoudre une équation différentielle

Ce texte expose une méthode simple basée sur deux théorèmes fondamentaux de votre cours. Les réponses nécessitent peu de calcul. Cet exercice permet en outre d'évaluer votre capacité à **comprendre un texte mathématique.**

Soient deux applications f et g définies sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Dans tout le problème f est définie par

$$\mathbf{f(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2^2}$$

$\mathcal{P}$our a et b réels positifs ou nuls donnés vérifiant g(a, b) = 0, on veut résoudre un problème qui pourrait s'intituler « résolution de l'équation différentielle ordinaire (1) sous la contrainte (2) » et qui s'écrit sous forme du système ($\mathcal{S}$) formé des conditions (1), (2) et (3) suivantes :

$$\begin{cases} t \geq 0 \quad y'(t) = f(y(t), z(t)) & (1) \\ t \geq 0 \quad g(y(t), z(t)) = 0 & (2) \\ \quad y(0) = a \quad z(0) = b & (3) \end{cases}$$

De tels systèmes différentiels représentent, par exemple une réaction chimique en solution. L'équation (1) modélise une réaction entre les espèces chimiques y et z et l'équation (2) assure l'électroneutralité.

Pour résoudre le système ($\mathcal{S}$), on peut éliminer la variable z dans l'équation (1).

1. En éliminant z grâce à l'équation (2), calculer y solution de (1) en fonction de a et de b lorsque g est définie par : $\mathbf{g(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1 + 1}$

$\mathcal{I}$l n'est pas toujours possible d'éliminer z à l'aide d'une expression explicite. Nous supposons désormais, dans toute la suite du problème, que **a = 0** et que **b = 1** et que la fonction g est définie par :

$$\mathbf{g(x_1, x_2) = x_2 + x_1 + \sin(x_1 x_2) - 1}$$

La fonction f reste inchangée.

2. Montrer qu'il existe un voisinage V_0 de a = 0 dans $\mathbb{R}$, et un voisinage V_1 de b = 1 dans $\mathbb{R}$, tels que

$$\forall\, (y,z) \in V_0 \times V_1 \qquad g(y,z) = 0 \iff z = \varphi\,(y)$$

Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$.

3. Soit t_0 un réel strictement positif et $t \to y(t)$ une application définie sur $[0,t_0]$, de classe C^1 sur $[0,t_0]$ à valeurs dans V_0 :

$$\forall\, t \in [0,t_0] \qquad y(t) \in V_0.$$

Vérifier alors que la relation (2) définit, sur $[0,t_0]$, une application $t \to z(t)$ à valeurs dans V_1 qui est de classe C^1 sur $[0,t_0]$

Calculer z'(t) sur $[0,t_0]$

$\mathcal{S}$i on remplace dans l'équation (1) z par φ (y), et si on intègre l'équation de 0 à t, on a

$$y(t) = a + \int_0^t \left[-2y(s) + (\varphi(y(s)))^2\right] ds$$

Dans ce cas, on remarque que la fonction y est le point fixe d'une application. Pour calculer y, on pense alors pouvoir utiliser un processus d'itérations successives comme dans le théorème du point fixe en choisissant, par exemple, la fonction nulle comme fonction de début des itérations

$$y_{k+1}(t) = a + \int_0^t \left[-2y_k(s) + (\varphi(y_k(s)))^2\right] ds$$

4. Montrer que dans ce cas on peut calculer $y_1(t)$ mais que on ne peut pas calculer $y_2(t)$ à cause de φ.

$\mathcal{P}$our pouvoir calculer le couple (y,z) solution des équations (1) et (2) on transforme le système formé des équations (1) et (2) en un système différentiel de la forme y'(t) = f(y(t),z(t)) et z'(t) = h(y(t),z(t))

5. Préciser h. Montrer que (y, z) est le point fixe d'une application F que l'on explicitera.

2003 DS

exercice 1

$L(S(t))^2 = I$ Lorsque t décrit un intervalle d'amplitude 2π, on obtient une infinité de solutions..

II.1.a. On peut prendre la norme 1 ou la norme infinie

II.1.b. $B = f(O) = \frac{I-A}{2} =$ fof(O) car $B^2 = O$

La suite ($f^p(O)$) est stationnaire donc convergente vers L=B et

$R^2 = (I-L)^2 = I - 2L = A$

II2a inégalité triangulaire et norme induite

$|||f(X)||| = |||\frac{1}{2}(X^2 + I - A)||| \leqslant \frac{1}{2}|||X^2||| + \frac{1}{2}|||I-A||| \leq \frac{1}{2}r_A{}^2 + \frac{1}{2}r_A < r_A$ car $(r_A{}^2 < r_A)$

b. $|||f(X)-f(Y)||| = \frac{1}{2}|||(X-Y)X+Y(X-Y)||| \leqslant \frac{1}{2}(|||X-Y|||\,|||X||| + |||Y|||\,|||X-Y|||)$

$|||f(X)-f(Y)||| \leqslant \frac{1}{2}(|||X-Y|||\, r_A + r_A|||X-Y|||) \leqslant r_A\,|||X-Y|||$ et $r_A < 1$

c. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie… complet.

Le sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est complet pour la norme $|||.|||$.

$\mathcal{B}$ est stable par f et f est contractante sur $\mathcal{B}$. Théorème du point fixe, la suite itérée converge et sa limite L est le point fixe de f sur B.

d. En particulier $L^2 + I - A = 2L \implies (L-I)^2 = A$

e. $R_p - R = (I-M_p)-(I-L) = M_p - L = f^p(M) - L \implies |||R_p - R||| = |||M_p - L||| \leqslant \frac{r_A^p}{1-r_A}|||M_1 - O||| \leqslant \frac{r_A^{p+1}}{2(1-r_A)}$

Problème

.1 a. Si x est nul, f atteint son minimum absolu égal à 0. Si y nul ou z nul nécessairement x est nul

b. si x,y et z non nuls alors la contrainte g=0 est qualifiée car $\begin{vmatrix} 2x & -2yz \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 4xy(1+z)$ n'est pas nul

Suite b. points critiques du Lagrangien *multiplicateurs* λ_1 et λ_2

(1) $2x(1-\lambda_1-\lambda_2)=0$ (2) $2y(\lambda_1 z - \lambda_2) = 0$ (3) $\lambda_1 y^2 - \lambda_2 2z = 0$ (4) $x^2 - y^2 z = 0$ (5) $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$

(1) (2) et (3) $\implies 1 = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\lambda_1 z - \lambda_2 = 0$ $\lambda_1 y^2 - \lambda_2 2z = 0$ d'où $\begin{vmatrix} z & -1 \\ y^2 & -2z \end{vmatrix} = 0$

$\implies -2z^2 + y^2 = 0 \Rightarrow 2z^2 = y^2$ et $2z^2 = y^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}\,z$

Il vient $x^2 - 2z^3 = 0$ et $x^2 + 3z^2 - 1 = 0 \implies 2z^3 + 3z^2 - 1 = (z+1)(2z^2+z-1) = (z+1)^2(2z-1)$

D'où $z = \frac{1}{2}$ $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $x = \frac{1}{2}$

2.1Eliminant x, z étant positif et donc (1+z) non nul :

$z<1$ et $y' = \frac{1-z^2}{1+z} = 1-z$ $y>0 : z<1$ $y = \sqrt{1-z}$ $x' = z\frac{1-z^2}{1+z} = z(1-z)$ $x>0 \implies x = \sqrt{z(1-z)}$

2.2 $G_1(0.5) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$ $G'_1(0.5) = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$

2.4. $(H(G_1(t)), G'_1(t)) = \frac{1-2t}{2\sqrt{t}} + \frac{-1}{2\sqrt{1-t}} + t$ $C_{\Gamma 1} = \left[\sqrt{t} - \frac{2}{3}t^{3/2} + (1-t)^{1/2} + \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = -\frac{1}{6}$

$G_2(t) = (-\sqrt{t(1-t)}, \sqrt{1-t}, t)$ $(H(G_2(t)), G'_2(t)) = -\frac{1-2t}{2\sqrt{t}} + \frac{-1}{2\sqrt{1-t}} + t$ $C_\Gamma = 2\left[\sqrt{t} - \frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

3.1 a. $h(x,y,z)=0$ où h de classe C^1 grad h $(x_0,y_0,z_0) = (2x_0, -2y_0z_0, -y_0^2)$ non nul dès que x_0 et y_0 non tous deux nuls. Le point M_0 est alors régulier Le plan tangent a pour équation :

$2x_0(x-x_0) - 2y_0z_0(y-y_0) - y_0^2(z-z_0) = 0$ ou $2x_0\,x - 2y_0z_0\,y - y_0^2\,z - 3x_0^2 = 0$

b. Représentation cartésienne $(x,y) \mapsto (x, y, x^2y^{-2})$ $f(x,y) = x^2y^{-2}$

hessienne de l'application f : $\mathcal{H}_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 2y_0^{-2} & -4x_0y_0^{-3} \\ -4x_0y_0^{-3} & 6x_0^2y_0^{-4} \end{pmatrix}$

déterminant $-4x_0^2y_0^{-6}$ strictement négatif - M_0 point hyperbolique

3.2a. $\forall(u,v)\in\mathbb{R}^2$ $(uv)^2 - v^2u^2 = 0$

b. Δ_{u_0} est la droite passant par le point H_{u_0} : $(0,0,u_0^2)$, de vecteur directeur : $u_0\,\vec{i} + \vec{j}$

Υ_{v_0} est la parabole du plan $y=v_0$ d'équation $z = \frac{1}{v_0^2}x^2$ rapporté au repère $(I_0, (\vec{i}, \vec{k}))$ où $I_0\,(0, v_0, 0)$

3.3

segments

```
[1/sqrt(2)*t,t,1/2],t=0..1/sqrt(2)
[t/2,t,1/4],t=0..sqrt(3)/2
parabole : >
[t/sqrt(2),1/sqrt(2),t^2],t=0..1/sqrt
(2)
```

3.4 $D_1F(u,v) = \begin{vmatrix} v \\ 0 \\ 2u \end{vmatrix}$ $D_2F(u,v) = \begin{vmatrix} u \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ $N(u,v) = \begin{vmatrix} -2u \\ 2u^2 \\ v \end{vmatrix}$

paramétrisation F* de la surface Σ^* $\Omega^* = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 / -1<u<1$ et $0 < v < \sqrt{1-u^2}\}$

$(RoF,N)(u,v) = \varphi(u,v) = -v$ $\Phi_H = \int_{-1}^{1}\left[-\frac{1}{2}v^2\right]_0^{\sqrt{1-u^2}} du = \int_{-1}^{1}\frac{-(1-u^2)}{2}du = -\frac{2}{3}$

H=H₁ Stokes+sens de parcours

Exercice 2

1) $x_2^2 = x_1 - 1$; (1) devient $y'(t) = -y(t) - 1$

$y(t) = e^{-t}a - (1-e^{-t})$.

2)g est C^1

$g(0,1)=0$

$D_2g(y,z) = 1 + y\cos(yz)$; $D_2g(0,1)=1$ non nul

le thm des fonctions implicites implique l'existence de V_0 et V_1 tels que $g(y,z)=0$ équivaut à

$z = \varphi(y)$. $\varphi(0)=1$; $\varphi'(0) = -D_1g(0,1)/D_2g(0,1) = -2$

3)$z(t) = \varphi(y(t))$. L'existence de φ' : thm des fts implicites +le thm de composition implique z est C^1.

$z'(t) = -(1 + z(t)\cos(y(t)z(t)))/(1 + y(t)\cos(y(t)z(t)))\; y'(t)$

4) $y_1(t) = a + (1-2a)t$; on ne connaît pas $\varphi(a + (1-2a)t)$.

5) $h(y(t)z(t))) =) = -(1 + z(t)\cos(y(t)z(t)))/ = (1 + y(t)\cos(y(t)z(t)))$.

$F(y,z) = (a + \int_0^t (-2y(u) + z(u)^2)\,du,\; b + \int_0^t \frac{-(1+z(u)\cos(y(u)z(u)))}{(1+y(u)\cos(y(u)z(u)))}du)$