Exercice extrema liés

Toutes les réponses doivent être justifiées. Une attention particulière sera apportée à la qualité de la rédaction

Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on définit les deux fonctions à valeurs réelles suivantes : $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{2} - y$, et $g(x,y) = x\sin(x) + \sin(y)$. On introduit le sous ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) = 0\}$, et on s'intéresse au problème :

$$\text{trouver les extrema de } \varphi \text{ dans } E. \tag{1}$$

(Q1) En utilisant le théorème des multiplicateurs de Lagrange, après en avoir vérifié les hypothèses, écrire les équations permettant de déterminer les extrema de φ sur E (on admettra que les seules solutions du système d'équations non linéaires sont les solutions évidentes $(0, k\pi)$).

(Q2) Montrer que le théorème des fonctions implicites s'applique pour l'équation $g(x,y) = 0$ dans un voisinage du point $(0, k\pi)$. Calculer les dérivées première et seconde de la fonction ainsi obtenue.

(Q3) Donner la nature des points $(0, k\pi)$ (minimum, maximum ou point selle).

Exercice espaces vectoriels normés

Toutes les réponses doivent être justifiées. Une attention particulière sera apportée à la qualité de la rédaction

Soit f une fonction continue définie sur $[0,T]$ non négative donnée. Pour $0 < T$ fixé, on s'intéresse à la solution du problème

$$\begin{cases} y'(t) = f(t), & 0 \le t \le T; \\ y(0) = \left(1 + y(T)\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \tag{2}$$

La fonction y représente l'évolution au cours du temps d'une quantité, et l'on souhaite que la valeur initiale $y(0)$ soit reliée à sa valeur finale[1].

(Q1) Montrer que la solution du problème (2) peut s'écrire comme :

$$y(t) = \left(1 + y(T)\right)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t f(s)\,ds. \tag{3}$$

[1] Pour les sciences financières il est essentiel de relier les valeurs initiales et finales d'un investissement

(Q2) On définit $E = C^0([0,T];\mathbb{R})$ comme l'ensemble des fonctions continues sur $[0,T]$ muni de la norme infinie $\|v\|_\infty = \sup_{t\in[0,T]} |v(t)|$. On introduit alors le sous ensemble

$$B = \{v \in E, \forall t \in [0,T], v(t) \geq 0\}.$$

Montrer que B est un sous ensemble complet de E.

(Q3) Montrer que le théorème du point fixe permet d'établir l'existence d'une solution du problème (3).

(Q4) Donner un procédé récurrent pour calculer y solution de (3) et pour $f(t) = t$, en partant de la fonction nulle calculer les deux premières itérées.

Problème de calcul différentiel et calcul intégral

Toutes les réponses doivent être justifiées. Une attention particulière sera apportée à la qualité de la rédaction.

Pour $0 < a$ donné, on note S_R la sphère de centre $\omega = (a,a,a)$ et de rayon $0 < R < a$, et B_R la boule délimitée par S_R. On notera que la première question ne sert pas dans la suite du problème.

(Q1) Calculer le volume du domaine limité par S_R et les plans $z = a$ et $z = a + \frac{R}{2}$.
Calculer l'aire de la portion de surface Σ de S_R limitée par les plans $z = a$ et $z = a - \frac{R}{2}$.

On considère la fonction $g: \quad \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x,y,z) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$.

(Q2) Montrer que g est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0)$.
Calculer sa matrice jacobienne au point (x,y,z) que l'on notera par $Dg(x,y,z)$.
Montrer que la trace[2] de la matrice hessienne H de g au point (x,y,z) vérifie :

$$Tr(H(x,y,z)) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2},$$

et vérifie de plus l'identité suivante :

$$Div(\vec{grad}\, g(x,y,z)) = Tr(H(x,y,z)) \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus (0,0,0). \tag{4}$$

(Q3) Donner un vecteur unitaire normal $\vec{n}$ à S_R orienté par la normale extérieure à B_R au point $M(x,y,z)$.

(Q4) On note (r,θ,φ) les coordonnées sphériques de centre $\omega(a,a,a)$ du point $M(x,y,z)$ (voir figure 1).

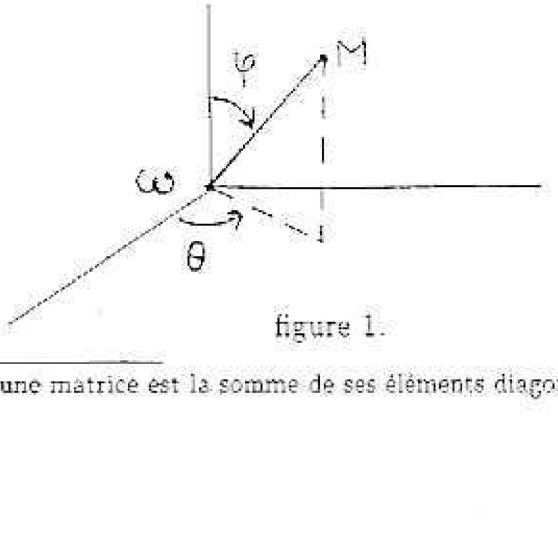


figure 1.

[2] on rappelle que la trace d'une matrice est la somme de ses éléments diagonaux

On considère une fonction $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ de classe C^1, on peut alors définir la fonction $F : (r, \theta, \varphi) \mapsto F(r, \theta, \varphi)$ avec : $F(r, \theta, \varphi) = f(x, y, z)$.

Vérifier qu'au point $M(x, y, z)$ de S_R

$$\vec{grad} f \cdot \vec{n} = \frac{\partial F}{\partial r}(R, \theta, \varphi)$$

(Q5) Soit $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ la normale à la sphère S_R, on note

$$D_{\vec{n}} f(x, y, z) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x + tn_1, y + tn_2, z + tn_3) - f(x, y, z)}{t} \tag{5}$$

Montrer que $D_{\vec{n}} f(x, y, z) = \vec{grad} f \cdot \vec{n}$

Maintenant faisons un peu d'analyse et montrons une inégalité entre la valeur au centre de la boule et la moyenne sur la sphère que vérifient certaines fonctions comme la fonction g.

(Q6) Montrer que :

$$\iiint_{B_R} \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\, dxdydz = \iint_{S_R} D_{\vec{n}} g\, d\sigma \tag{6}$$

Pourquoi a-t-on besoin de $R < a$?

(Q7) En notant $G(r, \theta, \varphi) = g(a + r sin(\varphi) cos(\theta), a + r sin(\varphi) sin(\theta), a + r cos(\varphi))$, en déduire que :

$$0 < \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial G}{\partial r}(R, \theta, \varphi)\, sin(\varphi) d\varphi\, d\theta. \tag{7}$$

(Q8) En intégrant entre R_1 et R_2 l'inégalité (7) avec $0 < R_1 < R_2 < a$, montrer que :

$$0 \leq \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} G(R_2, \theta, \varphi)\, sin(\varphi) d\varphi\, d\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} G(R_1, \theta, \varphi)\, sin(\varphi) d\varphi\, d\theta. \tag{8}$$

(Q9) Déterminer

$$\lim_{R_1 \to 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} G(R_1, \theta, \varphi)\, sin(\varphi) d\varphi\, d\theta \tag{9}$$

puis déduire de (8) que :

$$\forall R \in]0, a[,\ g(a, a, a) \leq \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} g\, d\sigma. \tag{10}$$

ERRATUM

Une imprécision s'étant glissée dans la première question de l'exercice "Exercice extrema liés" le lecteur voudra bien nous en excuser et lire pour la question (Q1) de l'exercice "Exercice extrema liés" :

(Q1) En utilisant le théorème des multiplicateurs de Lagrange, après en avoir vérifié les hypothèses, écrire les équations permettant de déterminer les extrema de φ sur E. On ne s'intéressera qu'aux solutions évidentes $(0, k\pi)$ du système d'équations non linéaires.

Exercice 1

① Les fonctions g et φ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$
Si la restriction de φ à l'ensemble $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / g(x,y) = 0\}$ présente un extremum en $(x_0,y_0) \in E$ et si $\partial_1 g(x_0,y_0) \neq 0$ ou si $\partial_2 g(x_0,y_0) \neq 0$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\partial_1 \varphi(x_0,y_0) = \lambda \partial_1 g(x_0,y_0) \text{ et } \partial_2 \varphi(x_0,y_0) = \lambda \partial_2 g(x_0,y_0)$$

On a $\partial_1 g(x_0,y_0) = \sin(x_0) + x_0 \cos(x_0)$ $\quad \partial_1 \varphi(x_0,y_0) = x_0$
$\partial_2 g(x_0,y_0) = \cos(y_0)$. $\quad \partial_2 \varphi(x_0,y_0) = -1$

d'où

$$\begin{cases} \lambda \partial_1 g(x_0,y_0) = \partial_1 \varphi(x_0,y_0) \\ \lambda \partial_2 g(x_0,y_0) = \partial_2 \varphi(x_0,y_0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \sin(x_0) + \lambda x_0 \cos(x_0) = x_0 \\ \lambda \cos(y_0) = -1. \end{cases}$$

Il est évident que $(x_0,y_0) = (0, k\pi)$ est solution du système

$$\begin{cases} \lambda \sin(x_0) + \lambda x_0 \cos(x_0) = x_0 \\ \lambda \cos(y_0) = -1 \\ x_0 \sin(x_0) + \sin(y_0) = 0 \end{cases} \quad \text{pour } \lambda = (-1)^{k+1}$$

De plus $\partial_2 g(0,k\pi) = (-1)^k \neq 0$ (l'hypothèse est vérifiée)

② g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0,y_0) = (0, k\pi)$

$g(x_0,y_0) = 0$

$\partial_1 g(x_0,y_0) = 0$ mais $\partial_2 g(x_0,y_0) = \cos(k\pi) = (-1)^k$

Il existe donc un voisinage V_1 de x_0 et un voisinage V_2 de y_0 t.q. $\{(x,y) \in V_2 \times V_1 / g(x,y) = 0\}$ soit le graphe d'une fonction $\psi : V_1 \to V_2$ de classe C^∞

De plus $\forall x \in V_1$

$$\psi'(x) = -\frac{\partial_1 g(x, \psi(x))}{\partial_2 g(x, \psi(x))}$$

$$= -\frac{\sin(x) + x\cos(x)}{\cos(\psi(x))}$$

En $x = x_0 = 0$ on obtient, puisque $\psi(0) = k\pi$,

$\psi'(0) = 0$.

On a $\psi''(x) = -\frac{[\cos(x) - x\sin(x)]\cos(\psi(x))}{\cos^2(\psi(x))}$

$$- \frac{\psi'(x)\sin(\psi(x))\,[\sin(x) + x\cos(x)]}{\cos^2(\psi(x))}$$

de sorte que $\psi''(0) = 2\,(-1)^{k+1}$

③ On s'intéresse aux extrémas de φ dans $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, g(x,y) = 0\}$ correspondants aux points $(0, k\pi)$.

Pour $(x,y) \in E$ tq $x \in V_1$ et $y \in V_2$ on a

$g(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \psi(x)$.

or $\varphi(x, \psi(x)) = \frac{x^2}{2} - \psi(x)$.

Appliquons la formule de Taylor-Young

$$\varphi(x, \psi(x)) - \varphi(0, \psi(0)) = \frac{x^2}{2} \cdot (1 - \psi''(0)) + o(x^2)$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(1 - 2(-1)^{k+1}\right) + o(x^2)$$

On en deduit que si k est pair $(0, k\pi)$ est un minimum

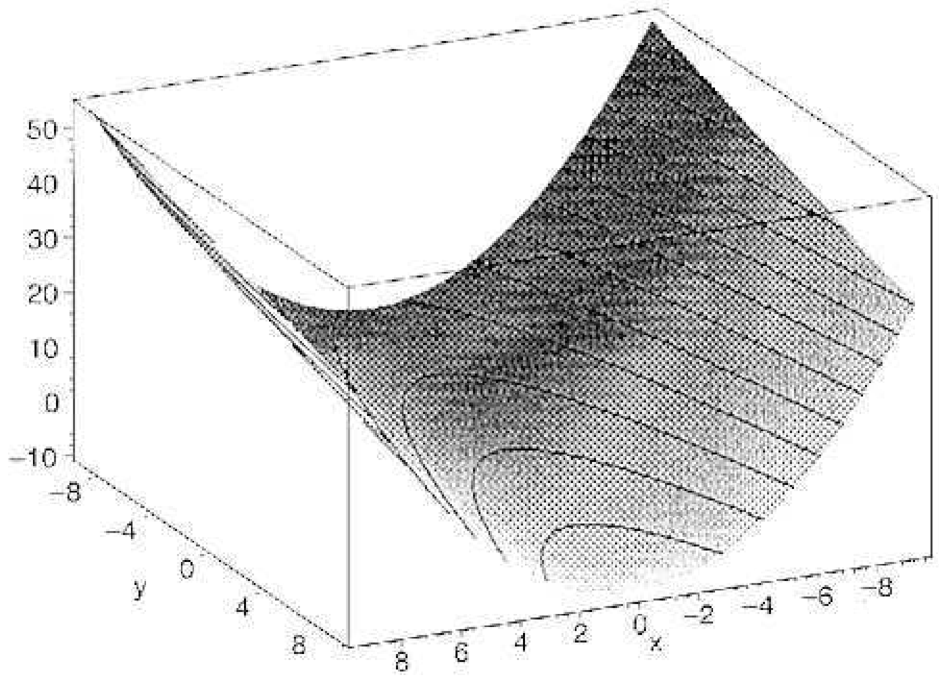
k est impair $(0, k\pi)$ est un maximum.

```
> restart: with(plots):
Warning, the name changecoords has been redefined
> f:=(x,y) -> x^2/2-y;;
  g:=(x,y) -> x*sin(x)+sin(y);
```

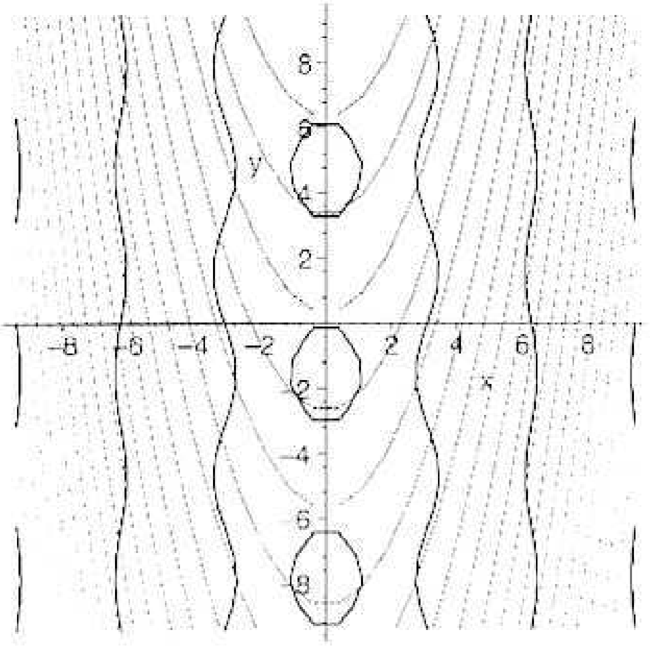
$$f := (x, y) \to \frac{1}{2}x^2 - y$$

$$g := (x, y) \to x\sin(x) + \sin(y)$$

```
> plot3d(f(x,y),x=-3*Pi..3*Pi,y=-3*Pi..3*Pi,style=patchcontour,axe
  s=boxed,orientation=[65,60]);
```




```
> Fig1:=contourplot(f(x,y),x=-3*Pi..3*Pi,y=-3*Pi..3*Pi,scaling=con
  strained,contours=20):
> Fig2:=implicitplot(g(x,y)=0,x=-3*Pi..3*Pi,y=-3*Pi..3*Pi,scaling=
  constrained,color=black,thickness=3):
> display3d({Fig1,Fig2});
```



y
x

>

Exercice 2

① Comme f est $C^0([0,T])$, y est $C^1([0,T])$ et $\forall t \in [0,T]$ on a

$$\int_0^t y'(s)\,ds = \int_0^t f(s)\,ds$$

d'où on déduit que $y(t) - y(0) = \int_0^t f(s)\,ds$
Puisque $y(0) = \sqrt{1+y(T)}$ on a bien

$$y(t) = \sqrt{1+y(T)} + \int_0^t f(s)\,ds.$$

② $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un evn complet (cf cours)
Pour montrer que B est complet, on peut montrer que B est fermé (on a l'equivalente B fermé $\Leftrightarrow$ B complet pour tout sous-ensemble B d'un banach).

Considérons une suite $(v_n)_n$ d'éléments de B ($\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \in B$) qui converge (pour la topologie de la norme $\|\cdot\|_\infty$) vers v.
L'ensemble B est fermé si et seulement si $v \in B$.
. Si $(v_n)_n$ cv vers v pour la topologie de la norme $\|\cdot\|_\infty$, la convergence de la suite de fonctions $(v_n)_n$ vers v est uniforme sur $[0,T]$. Comme les fonctions v_n sont continues sur $[0,T]$, v est continue sur $[0,T]$ (cf cours).
De plus $\forall t \in [0,T]$ $v_n(t) \geq 0$.
Pour $t \in [0,T]$ fixé, la suite numérique de terme général $v_n(t)$ converge vers $v(t)$.
Comme la suite numérique $(v_n(t))_n$ est à terme positif sa limite $v_n(t)$ est un réel positif
On a bien $v(t) \geq 0$. On peut conclure que $v \in B$ donc que B est fermé et par conséquent que B est complet

③ Considérons l'application $\Phi : y \in B \to z$
où z est défini sur $[0,T]$ par
$$z(t) = \sqrt{1+y(T)} + \int_0^t f(s)\,ds$$

Comme f est $C^0([0,T])$ sont integrale indéfinie
$t \longrightarrow \int^t f(s)\,ds$ est une application $C^1([0,T])$.
Par conséquent $z \in C^1([0,T])$
Comme $f \geq 0$, son integrale indéfinie est une fonction positive et par conséquent z est positive.

On en deduit que $\Phi(B) \subset B$.
On a montré que B est complet.
Pour appliquer le theoreme du point fixe, il reste à vérifier que Φ est contractante. Soit $(y_1, y_2) \in B^2$

$$\| \Phi(y_1) - \Phi(y_2) \|_\infty = \sup_{t \in [0,T]} | z_1(t) - z_2(t) |$$

$$= \sup_{t \in [0,T]} \left| \sqrt{1+y_1(T)} - \sqrt{1+y_2(T)} \right|$$

$$= \left| \sqrt{1+y_1(T)} - \sqrt{1+y_2(T)} \right|$$

$$= \left| \frac{y_1(T) - y_2(T)}{\sqrt{1+y_1(T)} + \sqrt{1+y_2(T)}} \right| \leq \frac{1}{2} | y_1(T) - y_2(T) |$$
$$\leq \frac{1}{2} \| y_1 - y_2 \|_\infty$$

En effet $1+y_1(T) \geq 1$ et $1+y_2(T) \geq 1$
donc $\sqrt{1+y_1(T)} + \sqrt{1+y_2(T)} \geq 2$
et $|y_1(T) - y_2(T)| \leq \sup_{t \in [0,T]} |y_1(t) - y_2(t)|$.

Φ est donc contractante de rapport $1/2$ et le thm du point fixe nous assure l'existence d'une unique solution à (2) dans B

④ Supposons que $f : t \to t$.
On a alors $y(t) = \sqrt{1 + y(T)} + \frac{1}{2} t^2$.

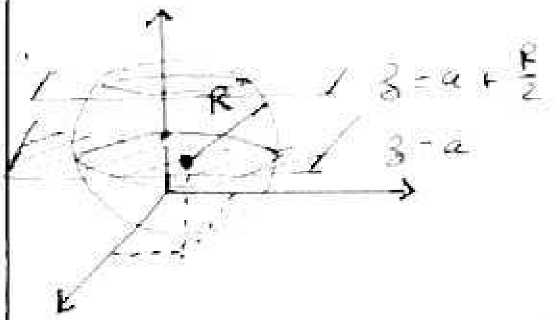
On considère la suite $(y_n)_n$ définie par $\begin{cases} y_{n+1} = \phi(y_n) \\ y_0 = 0 \end{cases}$

Cette suite cv vers le pt fixe de ϕ
qui est l'unique solution de notre problème.

On a $y_1 = \phi(y_0) : t \in [0,T] \longrightarrow 1 + \frac{1}{2} t^2$

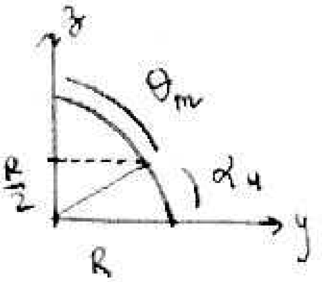
$y_2 = \phi(y_1) : t \in [0,T] \longrightarrow \sqrt{2 + \frac{1}{2} T^2} + \frac{1}{2} t^2$

Problème



① $\mathcal{V} = \iiint_V dx\,dy\,dz$

Ce volume est le même que celui de la boule de rayon R centrée en (0,0,0) limité par les plans $z = 0$ et $z = \frac{R}{2}$



On a $\sin \alpha_M = \dfrac{\frac{R}{2}}{R} = \dfrac{1}{2}$

donc $\alpha_M = \frac{\pi}{6}$

et $\theta_M = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

Par conséquent $\mathcal{V} = \int_0^R \int_0^{\pi/3} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr$

$= \frac{1}{3} R^3 . \, 2\pi . \underbrace{\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/3}}_{1 - 1/2} = \frac{\pi R^3}{3}$

$S = \iint_S ds = \int_0^{\pi/3} \int_0^{2\pi} R^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = 2\pi R^2 \left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/3}$
$= \pi R^2$

② L'application $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to x^2+y^2+z^2 \in \mathbb{R}^+_*$ est C^∞ car c'est une fonction polynomiale.
L'appication $\sqrt{\ }$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^+_*$ (mais n'est pas dérivable en 0). Par conséquent l'application
$(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0,0)\} \to \sqrt{x^2+y^2+z^2} \in \mathbb{R}^+_*$ est C^∞

L'application logarithme est C^∞ sur $\mathbb{R}_*^+$ donc g est C^∞ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ on a

$$Dg(x,y,z) = \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) \; ; \; \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) \; ; \; \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) \right)$$

$$= \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2} \; ; \; \frac{y}{x^2+y^2+z^2} \; ; \; \frac{z}{x^2+y^2+z^2} \right)$$

(Remarquer que $g(x,y,z) = \frac{1}{2} \ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$; le calcul est alors immédiat).

$$Tr\left(H(x,y,z)\right) = \Delta g(x,y,z) \quad \text{(le laplacien de } g\text{)}.$$

(*) $$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} g(x,y,z)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$$

or $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{x^2+y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

par symétrie $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{x^2+z^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right) = \frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

On obtient donc : $$Tr\left(H(x,y,z)\right) = \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$

On a $$\operatorname{div}(\vec{u}) = \frac{\partial}{\partial x} u_1 + \frac{\partial}{\partial y} u_2 + \frac{\partial}{\partial z} u_3$$

et $\vec{\nabla} g = \begin{pmatrix} \partial_x g \\ \partial_y g \\ \partial_z g \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$\operatorname{div}\left(\vec{\nabla} g(x,y,z)\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} g(x,y,z)$$
$$= \operatorname{Tr}\left(H(x,y,z)\right) \text{ d'après } (*)$$

③ S_R est paramétré par

$$F : \quad (\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \begin{cases} x = R\cos\varphi \sin\theta + a \\ y = R \sin\varphi \sin\theta + a \\ z = R\cos\theta + a \end{cases}$$

Un vecteur normal au point (x,y,z) est donné par

$$\vec{N} = \frac{\partial F}{\partial \theta}(\theta,\varphi) \wedge \frac{\partial F}{\partial \varphi}(\theta,\varphi)$$
$$= \begin{pmatrix} R\cos\varphi\cos\theta \\ R\sin\varphi\cos\theta \\ -R\sin\theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R\sin\varphi\sin\theta \\ R\cos\varphi\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} R^2\cos\varphi \sin^2\theta \\ R^2\sin^2\theta\sin\varphi \\ R^2\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix} = R^2\sin\theta \begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Un vecteur unitaire normal est alors $\begin{pmatrix} \cos\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$

puisque $\cos^2\varphi\sin^2\theta + \sin^2\varphi\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1.$

Ce vecteur s'exprime encore sous la forme

$$\vec{n} = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} x-a \\ y-a \\ z-a \end{pmatrix} = \frac{\overrightarrow{\omega M}}{\|\overrightarrow{\omega M}\|}.$$

Il est bien orienté vers l'extérieur de la sphère.

<u>Rem:</u> attention θ et φ sont inversés par rapport à la notation introduite question 4.

④ $\vec{\nabla} f \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{x-a}{R} \\ \frac{y-a}{R} \\ \frac{z-a}{R} \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{R} \Big((x-a)\,\partial_1 f(M) + (y-a)\,\partial_2 f(M) + (z-a)\,\partial_3 f(M) \Big),$

Or $F(R,\theta,\varphi) = f(T(R,\theta,\varphi))$ où

$T : (r,\varphi,\theta) \in [0,R] \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \longrightarrow \begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi + a \\ y = r\sin\theta\sin\varphi + a \\ z = r\cos\varphi + a \end{cases}$

et $\frac{\partial F}{\partial r}(R,\theta,\varphi) = \frac{\partial T_1}{\partial r}(R,\theta,\varphi)\ \partial_1 f(T(R,\theta,\varphi))$
$+ \frac{\partial T_2}{\partial r}(R,\theta,\varphi)\ \partial_2 f(T(R,\theta,\varphi))$
$+ \frac{\partial T_3}{\partial r}(R,\theta,\varphi)\ \partial_3 f(T(R,\theta,\varphi))$

$= \cos\theta\sin\varphi\ \partial_1 f(M) + \sin\theta\sin\varphi\ \partial_2 f(M) + \cos\varphi\ \partial_3 f(M)$

Or pour $M = (x,y,z) \in S_R$ on a $r = R$ et
$\frac{x-a}{R} = \cos\theta\sin\varphi$, $\frac{y-a}{R} = \sin\theta\sin\varphi$ et

$\frac{z-a}{R} = \cos\varphi$.

La relation est démontrée.

⑤ On a d'après la relation de Taylor-Young :

$f(x+tn_1, y+tn_2, z+tn_3) = f(x,y,z) + \nabla f(x,y,z) \cdot \begin{pmatrix} tn_1 \\ tn_2 \\ tn_3 \end{pmatrix}$
$+ o_0\left(\left\| \begin{pmatrix} tn_1 \\ tn_2 \\ tn_3 \end{pmatrix} \right\| \right)$

On en deduit que :

$$\frac{f(x+tn_1, y+tn_2, z+tn_3) - f(x,y,z)}{t}$$

$$= \nabla f(x,y,z) \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} + o_0(1)$$

En passant à la limite quand t tend vers 0 on obtient le résultat voulu

⑥ On a $\iiint_{B_R} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \, dx\,dy\,dz = \iiint_{B_R} \operatorname{div}(\nabla g) \, dx\,dy\,dz$

$$= \iint_{S_R} \vec{\nabla} g \cdot \vec{n} \, ds = \iint_{S_R} \frac{\partial g}{\partial n} \, ds$$

par le théorème de la divergence (Ostrogradski).
Pour appliquer ce théorème, il faut que le champ de vecteur (ici ∇g) soit de classe C^1 sur le domaine considéré. Or ∇g n'est pas borné en $(0,0,0)$
Il faut donc impérativement que $0 \notin B_R$.
Cette condition est satisfaite ssi $R < a$.

⑦ D'après la question 4 : $D_n g = \vec{\nabla} g \cdot \vec{n} = \frac{\partial G}{\partial r}(R,\theta,\varphi)$

Par ailleurs, $\iint_{S_R} D_n g \, ds = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\vec{\nabla} g \cdot \vec{n}) \, R^2 \sin(\varphi) \, d\varphi \, d\theta$

On en déduit que

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\vec{\nabla} g \cdot \vec{n}) \sin(\varphi) \, d\varphi \, d\theta = \frac{1}{R^2} \iint_{S_R} D_n g \, ds$$

$$= \frac{1}{R^2} \iiint_{B_R} \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \, dx\,dy\,dz.$$

Cette dernière quantité est positive : il s'agit de l'intégrale (triple) d'une fonction positive.
Le résultat est démontré.

(8) En intégrant entre R_1 et R_2 une quantité positive, on obtient pour résultat un réel positif.
On a donc :

$$0 \leq \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\partial G}{\partial r}(R, \theta, \varphi) \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta \, dR.$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\int_{R_1}^{R_2} \frac{\partial G}{\partial r}(R, \theta, \varphi) \, dR \right) \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(G(R_2, \theta, \varphi) - G(R_1, \theta, \varphi) \right) \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

d'où le résultat par linéarité.

Rem : $\frac{\partial G}{\partial r}$ signifie dérivée partielle par rapport à la 1^e variable (R ici). On aurait pu également le noter $\frac{\partial G}{\partial R}$ ou $\partial_1 G$.

(9) Formellement, en permutant limite et intégrales on obtient :

$$\lim_{R_1 \to 0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} G(R_1, \theta, \varphi) \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\lim_{R_1 \to 0} G(R_1, \theta, \varphi) \right) \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} G(0, \theta, \varphi) \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} g(a, a, a) \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta = 4\pi \, g(a, a, a).$$

D'après (8) on trouve : $\forall R_2 \in]0, a[$.

$$4\pi\, g(a,a,a) \leq \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} G(R_2,\theta,\varphi) \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \frac{1}{R_2^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} G(R_2,\theta,\varphi)\, R_2^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \frac{1}{R_2^2} \iint_{S_R} g \; ds .$$