INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON
CENTRE DE MATHEMATIQUES

Département du premier cycle
Cours de Mathématiques - Deuxième Année **2004-2005**
Groupe 52

Interrogation écrite I

Avertissement : les documents et calculatrices sont interdits. Durée 1h.
Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque. Le barème est donné à titre indicatif.

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 *(7 points)*
Résoudre l'équation différentielle :

$$y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 2x\,\mathrm{ch}(x).$$

(On donne : $\int x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(2x-1)\mathrm{e}^{2x}$ et $\int x^2\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(2x^2-2x+1)\mathrm{e}^{2x}$.)

Exercice 2 *(6 points)*
On considère la série de terme général $u_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n}$.
1 - Montrer que la série est à termes strictement positifs.
2 - Montrer que : $1 - n^{\frac{1}{n(n+1)}} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln(n)}{n^2}$.
3 - En déduire la nature de la série $\sum_n u_n$.

Exercice 3 *(7 points)*
On considère une suite $(u_n)_n$ décroissante, convergeant vers 0 et la suite $(v_n)_n$ définie par

$$v_n = n(u_n - u_{n+1}) \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On considère les suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ des sommes partielles associées respectivement aux séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ et définies par :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et} \quad V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

1 - On suppose dans cette question que la série $\sum_n u_n$ converge.
a) Montrer que la suite $(w_n)_n$ de terme général $w_n = nu_{n+1}$ converge vers 0.
b) Montrer que pour tout entier entier n on a

$$V_n = U_n - u_0 - nu_{n+1}.$$

c) En déduire que la série $\sum_n v_n$ converge et exprimer la somme de cette série en fonction de la somme de la série $\sum_n u_n$.

2 - On suppose dans cette question que la série $\sum_n v_n$ converge.
a) Montrer que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad \Big(n \geq N \Longrightarrow 0 \leq n(u_n - u_{n+p+1}) \leq \varepsilon\Big).$$

b) En déduire que la série $\sum_n u_n$ converge et exprimer la somme de cette série en fonction de la somme de la série $\sum_n v_n$.

Exercice 1

$$y'' + 2y' + y = 2x \quad ch(x)$$

équation homogène associée : $y'' + 2y' + y = 0$
équation caractéristique : $x^2 + 2x + 1 = 0$
soit $(x+1)^2 = 0$.
Elle admet une racine double $x_0 = -1$.
Les solutions de l'equ. homogène sont
$y(x) = (Ax + B)e^{-x}$ avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.
Une base de l'ev des solutions est $\{y_1, y_2\}$ où $y_1 : x \to xe^{-x}$, $y_2 : x \to e^{-x}$
Recherche d'une solution particulière par la méthode de la variation des constantes :
On cherche une solution de la forme $y(x) = \lambda_1(x) + \lambda_2(x)$
sous la condition $\lambda_1'(x)\, y_1(x) + \lambda_2'(x)\, y_2(x) = 0$.

$$\begin{cases} \lambda_1'(x)\, y_1(x) + \lambda_2'(x)\, y_2(x) = 0 \\ \lambda_1'(x)\, y_1'(x) + \lambda_2'(x)\, y_2'(x) = 2x\, ch(x). \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1'(x)\, x e^{-x} + \lambda_2'(x)\, e^{-x} = 0. \\ \lambda_1'(x)\, (e^{-x} - x e^{-x}) - \lambda_2'(x)\, e^{-x} = x \, (e^{x} + e^{-x}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1'(x)\, x + \lambda_2'(x) = 0. \\ \lambda_1'(x)\, (1 - x) - \lambda_2'(x) = x\, (e^{2x} + 1) \end{cases}$$

On a $\lambda_2'(x) = -\lambda_1'(x)\, x$ d'où
$$\lambda_1'(x)\, (1-x) + \lambda_1'(x)\, x = x\, (e^{2x} + 1)$$
soit
$$\lambda_1'(x) = x\, (e^{2x} + 1).$$

$$\lambda_1(x) = \int x(e^{2x} + 1)\, dx = \frac{1}{2}x^2 + \int x e^{2x}\, dx.$$

Stéphane BALAC

$$= \frac{1}{2}x^2 + x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx.$$

$$= \frac{1}{2}x(x+e^{2x}) - \frac{1}{4}e^{2x}.$$

et $\lambda_2'(x) = -x^2(e^{2x}+1)$

$$= -\frac{1}{3}x^3 - \int x^2 e^{2x}\,dx$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 - \frac{x^2}{2}e^{2x} + \underbrace{\int x e^{2x}\,dx}_{\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}}.$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 - \frac{e^{2x}}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$$

D'où la solution particulière

$$y(x) = \lambda_1(x)\,y_1(x) + \lambda_2(x)\,y_2(x)$$

$$= \frac{1}{2}x^3e^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{x} - \frac{1}{4}xe^{x}$$

$$- \frac{1}{3}x^3e^{-x} - \frac{e^{x}}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{6}x^3e^{-x} \qquad + \frac{2e^{x}}{4} - \frac{1}{4}e^{x}.$$

Autre méthode : d'après le principe de superposition, on s'intéresse aux équations

$$\left.\begin{array}{ll} y'' + 2y' + y = xe^{x} & (\mathcal{E}_1) \\ y'' + 2y' + y = xe^{-x} & (\mathcal{E}_2) \end{array}\right\}$$ second membre de la forme $P(x)e^{\alpha x}$.

1 n'est pas racine de l'équ. caractéristique ; on cherche une solution de $(\mathcal{E}_1)$ de la forme :

$y(x) = P(x)\,e^{x}$ avec $\deg(P) = 1$.

$P = ax + b$.

$y'(x) = a\,e^{x} + (ax+b)e^{x}$ $\qquad y''(x) = 2ae^{x} + (ax+b)e^{x}$

$$y'' + 2y' + y = [2a + (ax+b) + 2a + 2(ax+b) + (ax+b)]$$
$$= [4a + 4(ax+b)]\,e^x$$
$$= [4ax + 4(a+b)]\,e^x$$

On a donc
$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 4(a+b) = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{aligned} a &= 1/4 \\ b &= -1/4 . \end{aligned}$$

solution particulière $y(x) = \frac{1}{4}(x-1)\,e^x$ pour $(\mathcal{E}_1)$

-1 est racine double de l'équ. caractéristique.
On cherche une solution particulière de $(\mathcal{E}_2)$ de la forme
$$y(x) = Q(x)\,e^{-x} \quad \text{avec } \deg(Q) = 2+1 = 3$$
$$Q(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta .$$

$$y'(x) = Q'(x)\,e^{-x} - Q(x)\,e^{-x}$$
$$y''(x) = Q''(x)\,e^{-x} - 2\,Q'(x)\,e^{-x} + Q(x)\,e^{-x} .$$

$$y'' + 2y' + y = [Q'' \cancel{-2Q'} \cancel{+Q} \cancel{+2Q'} \cancel{-2Q} \cancel{+Q}]\,e^{-x}$$
$$= Q''(x)\,e^{-x}$$
$$= (6\alpha x + 2\beta)\,e^{-x} .$$

On a donc
$$\begin{cases} 6\alpha = 1 \\ 2\beta = 0 . \end{cases} \qquad \begin{aligned} \alpha &= 1/6 \\ \beta &= 0 . \end{aligned}$$

Solution particulière $y(x) = \frac{1}{6}x^3\,e^{-x}$ pour $(\mathcal{E}_2)$.

finalement, une solution particulière de $(\mathcal{E})$ est
$$y(x) = \frac{1}{6}x^3 e^{-x} + \frac{1}{4}(x-1)\,e^x .$$

Solution générale de l'équ. complète :

$$y(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + Ax + B\right)e^{-x} + \frac{1}{4}(x-1)\,e^x . \quad (A,B) \in \mathbb{R}^2$$

Stéphane BALAC

Exercice 2

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ d'où $n^{\frac{1}{n}} > n^{1/n+1}$
On en deduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad u_n > 0$.

2) $1 - n^{1/n(n+1)} = 1 - e^{\frac{\ln n}{n(n+1)}}$
or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n(n+1)} = 0$ et $1 - e^u \underset{0}{\sim} -u$
d'où $\quad 1 - n^{1/n(n+1)} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{\ln n}{n(n+1)}$

$n(n+1) \underset{+\infty}{\sim} n^2$ d'où le résultat.

3) $\sum u_n$ est une série à termes positifs
$u_n = n^{1/n} - n^{1/n+1} = n^{1/n+1}\left(n^{1/n(n+1)} - 1\right)$

$n^{1/n+1} \underset{+\infty}{\sim} 1$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} n^{1/n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{\frac{\ln n}{n+1}} = 1$ puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n+1} = 0$.

et $n^{1/n(n+1)} - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$

on en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$.

Pour $n \geq 1$ $\quad \ln n < \sqrt{n}$ donc $0 < \frac{\ln n}{n^2} < \frac{1}{n^{3/2}}$
donc $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{\ln n}{n^2}$ cv (critère de comparaison des séries positives)

On en déduit que $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}^*} u_n$ cv (critère d'equivalence).

Stéphane BALAC

Exercice 3

1) a) Par hypothèse $\sum_n u_n$ converge. On a donc $(u_n)_n$ qui converge vers 0 et par conséquent $\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = 0$.
Ceci implique que la suite $(w_n)_n$ peut :
i) • soit tendre vers $+\infty$ (car $u_n > 0$).
ii) • soit avoir une limite $\ell \neq 0$ $(\ell > 0)$
iii) • soit tendre vers 0.
Le cas i) est impossible car il implique que $v_{n+1} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ et si $u_n = o_{+\infty}(1/n)$, $\sum u_n$ DV (série positive).
Le cas ii) est impossible car il implique que $v_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n}$ on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ell}{n}$ et $\sum 1/n$ DV. contredit l'hypothèse.
Donc $(w_n)_n$ satisfait le cas iii). $\lim_{n \to +\infty} w_n = 0$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} k(u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} k u_k - \sum_{k=0}^{n} k u_{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k u_k - \sum_{k=1}^{n+1} (k-1) u_k = -(n+1) u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} u_k$$

$$= -n u_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} u_k = -n u_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} u_k - u_0$$

Autre méthode : procéder par récurrence.

c) Comme $\sum u_n$ cv, la suite des sommes partielles $(U_n)_n$ converge. D'après la question a) on a $(w_n)_n$ qui converge. On déduit de la relation $V_n = U_n - u_0 - w_n$ que la suite des sommes partielles $(V_n)_n$ converge (somme de 2 suites convergentes). Par déf. cela signifie que la série $\sum v_n$ converge.
De plus on a $\lim_{n \to +\infty} w_n = 0$. Soit ℓ la somme de la série $\sum u_n$. De la relation $V_n = U_n - u_0 - w_n$,

Stéphane BALAC

On déduit que $\ell' = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \ell - u_0$.

② On suppose que $\sum v_n$ converge.
D'après le critère de Cauchy :
$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+ \ \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \forall p \in \mathbb{N}$
$$\left(n \geq N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} v_k\right| < \varepsilon\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé et n un entier $\geqslant N$.
$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} v_k\right| = \sum_{k=n+1}^{n+p} v_k = \sum_{k=0}^{n+p} v_k - \sum_{k=0}^{n} v_k$$
$$= v_{n+p} - v_n = U_{n+p} - u_0 - (n+p)u_{n+p+1} - U_n + u_0 + n u_{n+1}$$
$$= \underbrace{U_{n+p} - U_n}_{} + n u_{n+1} - (n+p)u_{n+p+1}$$
$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \geqslant p\, u_{n+p} \quad \text{car } (u_n)_n \downarrow \ \left(p \text{ termes} \geqslant u_{n+p}\right)$$
$$\geqslant p\, u_{n+p+1}$$

donc $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} v_k\right| \geqslant n\left(u_{n+1} - u_{n+p+1}\right)$

On en déduit que $n\left(u_{n+1} - u_{n+p+1}\right) \leq \varepsilon$.

Cette relation est vraie pour tout entier p donc
$$\lim_{p \to +\infty} n\left(u_{n+1} - u_{n+p+1}\right) \leq \varepsilon.$$
Or $\lim\limits_{p \to +\infty} u_{n+p+1} = \lim\limits_{k \to +\infty} u_k = 0$

donc $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \ (n \geq N \Rightarrow 0 \leq n u_{n+1} \leq \varepsilon)$
La suite $(n u_{n+1})_n$ cv vers 0.
Finalement puisque $U_n = v_n + u_0 + n u_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
On en déduit que $(U_n)_n$ cv vers $\ell' + u_0$
et $\sum u_k$ cv vers $\ell' + u_0$.

Stéphane BALAC