INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON
Centre de Mathématiques

Cours de Mathématiques - Deuxième Année **2004-2005**
Groupe 52

INTERROGATION ÉCRITE II

Avertissement : les documents et calculatrices sont interdits. Durée 1h.

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 On considère la fonction réelle $f : x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$.

1 - Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.

2 - Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathcal{D}$.

Exercice 2 On considère la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par la relation

$$f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1 - a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_n$ de la fonction f_n pour tout entier n non nul.

b) Sur quel ensemble $\mathcal{D}$ sont définies simultanément toutes les fonctions f_n ?

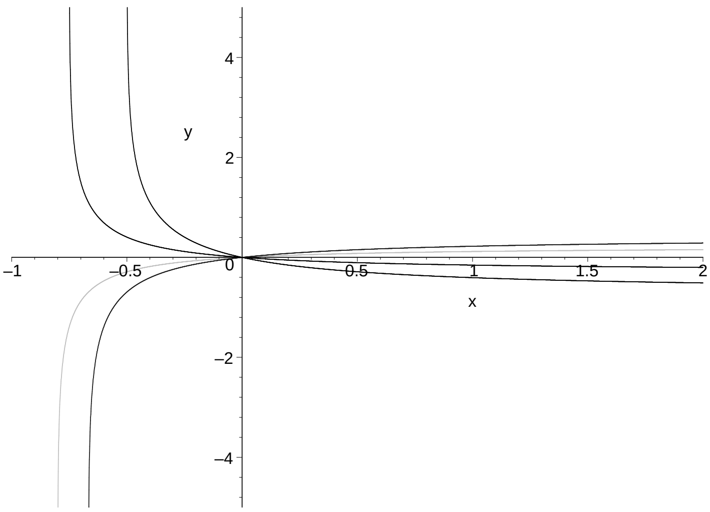
2 - Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathcal{D}$ vers une fonction f que l'on précisera.

On effectue le calcul suivant avec MAPLE :

```
> fn := (n,x)->(-1)**n*log(1+x/(n*(1+x))) : simplify(diff(fn(n,x),x)) ;
```

$$\frac{(-1)^n}{(1+x)\,(n+(n+1)x)}$$

```
> plot([fn(1,x),fn(2,x),fn(3,x),fn(4,x)], x=-1..5) ;
```



3 - Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0, +\infty[$.

On s'intéresse à la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ sur $[0, +\infty[$.

4 - a) Pour $x \in [0, +\infty[$ fixé, a-t-on convergence absolue de la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$?

b) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

5 - a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

6 - Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathcal{D}$.

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON
Centre de Mathématiques

Cours de Mathématiques - Deuxième Année **2004-2005**
Groupe 52

INTERROGATION ÉCRITE II

Avertissement : les documents et calculatrices sont interdits. Durée 1h.
La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 On considère la fonction réelle $f : x \longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$.

1 - Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.

2 - Montrer que f est continue et dérivable sur $\mathcal{D}$.

Exercice 2 On considère la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par la relation

$$f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1 - a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_n$ de la fonction f_n pour tout entier n non nul.
  b) Sur quel ensemble $\mathcal{D}$ sont définies simultanément toutes les fonctions f_n ?

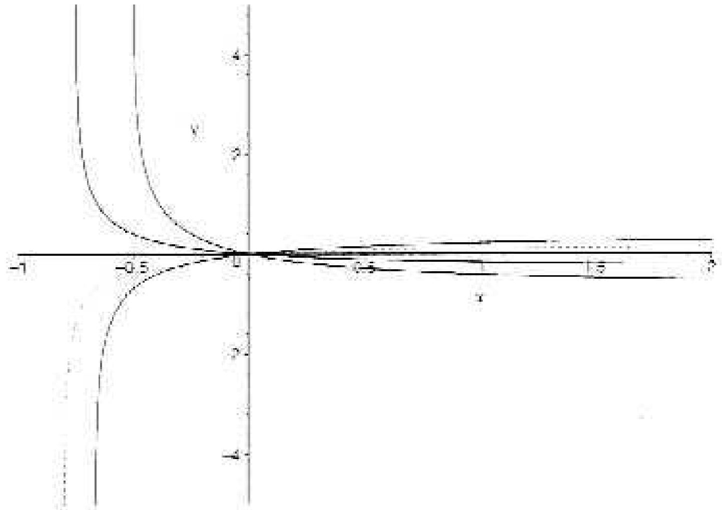
2 - Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathcal{D}$ vers une fonction f que l'on précisera.

On effectue le calcul suivant avec MAPLE :

```
> fn := (n,x)->(-1)**n*log(1+x/(n*(1+x))) : simplify(diff(fn(n,x),x));
```

$$\frac{(-1)^n}{(1+x)(n+(n+1)x)}$$

```
> plot([fn(1,x),fn(2,x),fn(3,x),fn(4,x)], x=-1..5);
```



3 - Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $[0, +\infty[$.

On s'intéresse à la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ sur $[0, +\infty[$.

4 - a) Pour $x \in [0, +\infty[$ fixé, a-t-on convergence absolue de la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$?
  b) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

5 - a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.
  b) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f_n(x)$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

6 - Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathcal{D}$.

Exercice 1

$f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$ est définie pour tout réel x.

On a $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^3}$ (*). Puisque $\sum 1/n^3$ cv, la série numérique $\sum f_n(x)$ cv absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$f : x \longrightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ est donc définie sur $\mathbb{R}$

D'après (*) on déduit que $\displaystyle\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{n^3}$.

(On a $\displaystyle\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^3}$ et $f_n(\pi/2n) = \dfrac{1}{n^3}$ d'où l'égalité)

Comme $\sum 1/n^3$ cv, la série $\sum f_n(x)$ cv normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, f_n est clairement continue sur $\mathbb{R}$ (car sinus est continue sur $\mathbb{R}$). On peut en conclure que f est continue sur $\mathbb{R}$.

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_n'(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$

On a $\displaystyle\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n'(x)| = \frac{1}{n^2}$ (même argumentation que ci-dessus).

On en déduit que $\sum f_n'(x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ (car $\sum 1/n^2$ cv) et par conséquent que la série $\sum f_n'(x)$ converge uniformément.

On peut en conclure que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Stéphane BALAC

Exercice 2

$$f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right) \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

1)a) Domaine de définition de f_n.

$f_n(x)$ défini pour x tq $1 + \dfrac{x}{n(1+x)} > 0$

or $1 + \dfrac{x}{n(1+x)} > 0 \iff \dfrac{x}{n(1+x)} > -1 \quad (1)$

• Si $1+x > 0$ alors $n(1+x) > 0$ et

$(1) \iff x > -n(1+x) \iff x(1+n) > -n$

$\iff x > -\dfrac{n}{1+n} \iff x \in \left]-\dfrac{n}{n+1}, +\infty\right[$.

• Si $1+x < 0$ alors $n(1+x) < 0$ et

$(1) \iff x < -n(x+1) \iff x(1+n) < -n$

$\iff x < -\dfrac{n}{1+n} \iff x \in \left]-\infty, -\dfrac{n}{n+1}\right[$

On en déduit que f_n est défini sur l'ensemble

$$D_n = \left(\left]-1, +\infty\right[\cap \left]-\frac{n}{n+1}, +\infty\right[\right) \cup \left(\left]-\infty, -1\right[\cap \left]-\infty, -\frac{n}{n+1}\right[\right)$$

$$= \left]-\frac{n}{n+1}, +\infty\right[\cup \left]-\infty, -1\right[.$$

b) Le domaine commun à toutes les fonctions f_n est

$$D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} D_n = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[.$$

2) Etude de la convergence simple de la suite $(f_n)_n$ sur l'ensemble $D =]-\infty, -1[\cup]-\frac{1}{2}, +\infty[$.

Pour x fixé, $x \in D$, il s'agit de considérer la convergence de la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n(1+x)} = 0 \quad \forall x \in D$.

Or $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$ donc $\forall x \in D$ on a

$$f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} (-1)^n \cdot \frac{x}{n(1+x)}$$

On en déduit que $\forall x \in D \quad \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Il y a donc convergence simple sur D de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers la fonction nulle.

Stéphane BALAC

3) La convergence de $(f_n)_n$ vers la fonction nulle sera uniforme sur D si $\alpha_n = \sup\limits_{x\in D} |f_n(x)|$ est le terme général d'une suite qui tend vers 0..

f_n est continue et dérivable sur $]-\infty,-1[$ et $]-1/2, +\infty[$.

On a $\forall x \in D$

$$f_n'(x) = (-1)^n \left(\frac{x}{n(1+x)}\right)' \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{n(1+x)}}$$

$$= \frac{(-1)^n\, n\,(1+x)}{n+(n+1)x} \cdot \frac{n(1+x) - nx}{n^2(1+x)^2}$$

$$= \frac{(-1)^n\,(1+x)}{(n+(n+1)x)(1+x)^2} = \frac{(-1)^n}{(n+(n+1)x)(1+x)}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(n+1)\left(\frac{n}{n+1} + x\right)(1+x)}$$

On en déduit le tableau de variation suivant

Cas n pair

x	$-\infty$		-1		$-1/2$		$+\infty$
f_n'		$+$				$+$	
f_n	$\ln(1+\frac{1}{n})$	$\nearrow$	$+\infty$		$\ln(1-1/n)$	$\nearrow$	$\ln(1+\frac{1}{n})$

Cas n impair, $n>1$

x	$-\infty$		-1		$-1/2$		$+\infty$
f_n'		$-$				$-$	
f_n	$-\ln(1+\frac{1}{n})$	$\searrow$	$-\infty$		$-\ln(1-1/n)$	$\searrow$	$-\ln(1+\frac{1}{n})$

On en déduit que f_n n'est pas borné sur D donc la borne supérieure sur D n'existe pas. Il n'y a pas convergence uniforme sur D.

Par contre, sur $[0,+\infty[$ on a bien convergence uniforme car $f_n(0)=0$ et f_n est strictement monotone donc

$$\beta_n = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

On a clairement $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = 0$.

On a aussi convergence uniforme sur $]-\frac{1}{2},+\infty[$

Stéphane BALAC

4) a) Etude de la convergence simple de $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ sur $\mathbb{R}^+$

Pour $x \in \mathbb{R}^+_*$ fixé, on a vu que $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{1+x} \frac{(-1)^n}{n}$.
Mais ici on ne peut utiliser les critères de comparaison par équivalent des séries num. car la série n'est pas à termes positif.

Remarquons que $|f_n(x)| = \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{n}$
Il n'y a pas convergence absolue pour $x > 0$ car la série $\sum 1/n$ diverge. Pour $x = 0$ on a la série nulle.

b) Pour étudier la convergence simple de la série, utilisons le critère d'Abel pour les séries numériques.
Notons $\alpha_n = \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}^+_*$ fixé.

La suite $(\alpha_n)_n$ est positive car $\forall x \in \mathbb{R}^+_*$ $\frac{x}{n(1+x)} \geq 0$ et $\ln(t) \geq 0$ $\forall t \in [1, +\infty[$.
Elle est décroissante car $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\alpha_{n+1} - \alpha_n = \ln\left(\frac{(1+x)(n+1) + x}{(n+1)(1+x)}\right) - \ln\left(\frac{n(1+x)+x}{n(1+x)}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{n\cancel{(1+x)}}{(n+1)\cancel{(1+x)}} \cdot \frac{(1+x)(n+1) + x}{n(1+x) + x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{n(n+1)(1+x) + nx}{(n+1)n(1+x) + (n+1)x}\right) < 0$$

car $\frac{n(n+1)(1+x) + nx}{(n+1)n(1+x) + (n+1)x} = 1 - \frac{x}{n(n+1)(1+x) + (n+1)x} < 1$

Elle tend vers 0 car $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{n}$.

D'après le théorème d'Abel (dans sa version pour les séries alternées) on en conclut que $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ CV simplement sur $\mathbb{R}^+_*$.

5) a) <u>Convergence normale de</u> $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ sur $[0,+\infty[$.

On s'intéresse à $\beta_n = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x)| = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0$.

(le calcul de cette quantité a été faite précédement)

On a $\beta_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Or $\sum 1/n$ DV donc il n'y a pas convergence normale.

b) Pour établir la convergence uniforme, on a recours au théorème d'Abel uniforme.

Notons $\alpha_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n(1+x)}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$.

On a déjà montré que $\alpha_n(x)$ était positive, decroissante vers 0 pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

Il reste à montrer que $(\alpha_n(x))_n$ est une suite de fonction qui converge uniformement vers 0.

on a $f_n(x) = (-1)^n \alpha_n(x)$ d'où $\alpha_n(x) = (-1)^n f_n(x)$

et $\forall x \in \mathbb{R}^+$,

$$\alpha_n'(x) = (-1)^n f_n'(x) = \frac{1}{(n+(n+1)x)(1+x)} > 0.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, α_n est une fonction croissante sur $[0,+\infty[$.

$\alpha_n(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \alpha_n(x) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0$.

donc $\sup_{x\in[0,+\infty[} |\alpha_n(x)| = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \|\alpha_n\|_\infty = 0$, on a bien convergence uniforme de la suite $(\alpha_n(x))_n$ vers la fonction nulle sur $[0,+\infty[$.

Par le thm d'Abel uniforme (dans sa version pour les series alternées) on en deduit que $\sum f_n(x)$ CV uniform. sur $[0,+\infty[$.