Interrogation de mathématiques numéro 2

Lanières K et L

13/12/2007 (durée : 1h30)

Les calculatrices, tout document, et tout moyen de communication sont interdits

Exercice 1 *Séries (6 points)*

1 - Quelle est la nature (convergence ou divergence) des séries de terme général :

a) $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$, $n \geq 1$

b) $v_n = (-1)^n \dfrac{(\ln n)^{100}}{n}$, $n \geq 1$

c) $w_n = \dfrac{\ln n}{n} \sin(5n)$, $n \geq 1$

2 - Soient $a > 0$, $b \geq 0$, et c trois réels. Soit

$$u_n = \frac{1}{an+b} - \frac{c}{n} , \quad n \geq 1 .$$

a) Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur a et c pour que la série $\sum_n u_n$ converge.

b) Dans le cas $a = c = 1$ et $b = 2$, calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ de cette série.

Exercice 2 *Suites d'applications (6 points)*

Pour $n \geq 1$ entier et $x \in [0;1]$, on pose

$$f_n(x) = n \ln\Big(\cos \frac{x}{\sqrt{n}}\Big) \quad \text{et} \quad f(x) = -\frac{x^2}{2} .$$

1 - Montrer que la suite d'applications $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur $[0;1]$.

2 - On rappelle que : $0 \leq u < \frac{\pi}{2} \Rightarrow u \leq \tan u$. Pour $n \geq 1$ entier, on note g_n l'application $[0;1] \to \mathbb{R}$ définie par : $g_n = f_n - f$.

a) Etudier les variations de g_n sur $[0;1]$.

b) En déduire que la suite d'applications $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0;1]$.

3 - Montrer que pour tout $x \leq 0$ et $y \leq 0$ (**négatifs**), on a : $|e^x - e^y| \leq |x - y|$.

4 - En déduire que la suite d'applications $(e^{f_n})_n$ converge uniformément vers e^f sur $[0;1]$, et que :

$$\int_0^1 \Big(\cos\Big(\frac{t}{\sqrt{n}}\Big)\Big)^n dt \to \int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

(on ne cherchera pas à calculer ces intégrales).

Exercice 3 ***Séries d'applications (8 points)***

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite **décroissante** de réels **strictement positifs**. On considère la série d'applications $\sum_n u_n$ où :

$$u_n(t) = a_n t(1-t)^n \ , \quad n \in \mathbb{N} \ , \quad t \in [0;1] \ .$$

1 - Montrer que cette série d'applications converge simplement sur $[0;1]$.

2 - Dans le cas où $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0;1]$, calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$.

Dans la suite on ne suppose plus que $a_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3 - Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur la suite $(a_n)_n$ pour que $\sum_n u_n$ converge normalement sur $[0;1]$.

On note $\ell \geq 0$ la limite de la suite $(a_n)_n$ (remarque : puisque $(a_n)_n$ est décroissante et minorée par zéro cette limite ℓ existe et on a bien $\ell \geq 0$).

Pour tout $t \in [0;1]$ on note : $U(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$.

4 - On suppose que $\ell > 0$. Montrer que, pour $t > 0$, $U(t) \geq \ell$. Que pouvez-vous en déduire quant à la continuité de U en 0 ?

5 - Montrer que $\sum_n u_n$ converge uniformément sur $[0;1]$ si et seulement si $\ell = 0$.

6 - On suppose que $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$, et $a_0 = 1$. La somme U est-elle continue sur $[0;1]$? (justifier votre réponse).

Correction

Exercice 1

1 -

a)
- La série est alternée.
- Si on pose $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$, alors $\varphi'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, $\varphi'(x) \leq 0$ pour $x \geq e$, donc la suite $(|u_n|)_n$ est décroissante à partir d'un certain rang (à partir de $n = 3$).
- Enfin $|u_n| \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Donc d'après les résultats du cours sur les séries alternées, la série converge.

b)
- La série est alternée.
- Si on pose $\psi(x) = \frac{(\ln x)^{100}}{x}$, alors $\psi'(x) = (100 - \ln(x))\frac{\ln(x)^{99}}{x^2}$, donc ψ est décroissante sur $[e^{100}; +\infty[$, donc la suite $(|v_n|)_n$ est décroissante à partir d'un certain rang.
- Enfin $|v_n| \to 0$ quand $n \to +\infty$.

D'après les résultats du cours sur les séries alternées, la série converge.

c) Il s'agit d'une "série trigonométrique" (ou partie réelle d'une série trigonométrique selon la définition).
- La suite $(\frac{\ln n}{n})_n$ est décroissante à partir d'un certain rang.
- $\frac{\ln n}{n}$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
- Puisque $5 \neq 2k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $|\sum_{k=0}^{N} \sin(5k)|$ borné indépendamment de N (cours sur les séries trigonométriques).

Donc d'après la règle d'Abel, la série converge.

2 -

a) On a :

$$u_n = \frac{1}{n}(\frac{1}{a} - c) - \frac{b}{a^2 n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

Par conséquent la série converge si $ac = 1$ et diverge sinon.

b) Pour tout $N \geq 1$,

$$\sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n}\Big) = \sum_{n=3}^{N+2}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} - 1 - \frac{1}{2}$$

par conséquent la somme de la série vaut $-\frac{3}{2}$.

Exercice 2

1 - On a $f_n(0) = 0 = f(0)$ et pour tout $x \in]0;1]$, on a :

$$f_n(x) = n\ln\Big(1 - \frac{x^2}{2n} + o(\frac{1}{n})\Big) = n\Big(-\frac{x^2}{2n} + o(\frac{1}{n})\Big) = -\frac{x^2}{2} + o(1)$$

cqfd.

2 - Pour $x \in [0;1]$, on a : $\frac{x}{\sqrt{n}} \in [0; \frac{\pi}{2}[$, et :

$$g_n'(x) = n\frac{-\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{x}{\sqrt{n}}}{\cos\frac{x}{\sqrt{n}}} + x = \sqrt{n}\Big(-\tan\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x}{\sqrt{n}}\Big).$$

Puisque $\frac{x}{\sqrt{n}} \in [0; \frac{\pi}{2}[$, $g_n'(x) \leq 0$, donc g_n est décroissante. Donc pour tout $x \in [0;1]$ on a

$$g_n(1) \leq g_n(x) \leq g_n(0),$$

et puisque $g_n(0) = 0$ on en déduit $|g_n(x)| \leq |g_n(1)|$, et enfin $|g_n(1)| \to 0$ quand $n \to +\infty$ d'après la convergence simple montrée à la question 1. L'inégalité $|g_n(x)| \leq |g_n(1)|$ entraîne donc la convergence uniforme sur $[0;1]$.

3 - D'après le théorème des accroissements finis, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, il existe (par exemple en supposant $x \leq y$) $z \in]x;y[$ tel que $e^x - e^y = (x-y)e^z$, cqfd.

4 - Pour $x \in [0;1]$ on a $f_n(x) \leq 0$ et $f(x) \leq 0$ par conséquent, d'après la question précédente,

$$|e^{f_n(x)} - e^{f(x)}| \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{y\in[0;1]} |f_n(y) - f(y)|$$

et donc

$$0 \leq \sup_{x\in[0;1]} |e^{f_n(x)} - e^{f(x)}| \leq \sup_{x\in[0;1]} |f_n(x) - f(x)|$$

et le terme de droite tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$, d'où la convergence uniforme demandée.

- Les fonctions e^{f_n} sont continues, donc intégrables, pour tout n,
- elles convergent uniformément sur $[0;1]$ (qui est un intervalle fermé borné

donc la limite demandée résulte directement du cours (théorème de convergence uniforme et intégration).

Exercice 3

1 - Pour $t = 0$ $u_n(t) = 0$ et pour $t \in]0;1]$ on a $0 \leq u_n(t) \leq a_0(1-t)^n$, qui est une série géométrique de raison $1-t \in [0;1[$, donc convergente. Par théorème de comparaison (puisque $u_n(t) \geq 0$) la série $\sum_n u_n(t)$ converge.

Remarque : on peut aussi, pour $t \neq 0$, utiliser la règle de D'Alembert.

2 - $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$ vaut 0 si $t = 0$ et 1 si $t \in]0;1]$.

3 - Posons $\varphi_n(t) = t(1-t)^n$. On a : $\varphi_n'(t) = (1-t)^{n-1}\Big(1-(n+1)t\Big)$, donc

$$\sup_{t\in[0;1]} |\varphi_n(t)| = \varphi_n(\frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}\Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big)^n \sim \frac{1}{ne} \quad \text{quand} \quad n \to +\infty\ .$$

Par conséquent $\sum_n u_n$ converge normalement sur $[0;1]$ si et seulement si la série $\sum_n \frac{a_n}{n}$ converge.

4 - Puisque a_n est décroissante on a : $a_n \geq \ell$ pour tout n. Par conséquent, pour tout $t > 0$,

$$U(t) \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \ell t(1-t)^n = \ell.$$

Puisque par ailleurs $U(0) = 0$, on en déduit que U n'est pas continue en 0.

5 - Si $\ell > 0$, alors, d'après la question précédente, U n'est pas continue en 0. Ceci montre que la convergence de la série $\sum_n u_n$ n'est pas uniforme (si elle était uniforme, puisque $t \mapsto u_n(t)$ est continue sur $[0;1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme U serait continue d'après le cours).

[Autre méthode possible (plus compliquée) : Posons $R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(t)$. Si $\ell > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, pour tout $t \in]0;1]$,

$$R_n(t) \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ell t(1-t)^k = \ell(1-t)^{n+1}$$

et donc $\sup_{t\in[0;1[} R_n(t) = \ell > 0$, donc $R_n(t)$ ne converge pas uniformément vers 0 sur $[0;1]$, donc la série $\sum_n u_n$ ne converge pas uniformément sur $[0;1]$.]

Si $\ell = 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $a_n \leq \varepsilon$, et par conséquent, pour tout $n \geq n_0$, et pour tout $t \in]0;1]$,

$$R_n(t) \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} t(1-t)^k = \varepsilon(1-t)^{n+1} \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que la série $\sum_n u_n$ converge uniformément sur $[0;1]$.

6 -
- Pour tout n $u_n(.)$ est continue sur $[0;1]$
- La suite $(a_n)_n$ converge vers 0, donc la série $\sum_n u_n$ converge uniformément sur $[0;1]$ (d'après la question précédente).

Donc d'après le cours (théorème de convergence uniforme et continuité), la somme U est continue sur $[0;1]$.
