INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON
CENTRE DE MATHEMATIQUES

Département du premier cycle
Cours de Mathématiques - Deuxième Année **2004-2005**
Groupe 52

Interrogation écrite III

Avertissement : les documents et calculatrices sont interdits. Durée 1h.
Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque. Le barème est donné à titre indicatif.

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 *(6 points)*

On considère l'espace vectoriel réel $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ s'annulant en 0. On rappelle que $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ est complet.

1 - Montrer que l'application $N : f \in E \longmapsto \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)|$ est une norme sur E.

2 - a) Montrer que si $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans (E, N), elle converge dans $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$.
b) Montrer que (E, N) est un espace vectoriel normé complet.

Exercice 2 *(4 points)*

Soient $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $k \in \mathcal{C}^0([0,1]^2,\mathbb{R})$ telle que $\sup_{(x,y)\in[0,1]^2} |k(x,y)| = \frac{1}{2}$. On considère l'application $\phi : g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \longmapsto \phi(g) \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ où $\phi(g)$ est définie par

$$\forall x \in [0,1] \quad \phi(g)(x) = f(x) + \int_0^1 k(x,y)\ g(y)\ \mathrm{d}\,y.$$

En utilisant le théorème du point fixe (que l'on énoncera précisément), montrer qu'il existe une unique application $g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ solution de l'équation de Volterra : $\forall x \in [0,1] \quad g(x) = f(x) + \int_0^1 k(x,y)\ g(y)\ \mathrm{d}\,y$.

Exercice 3 *(6 points)*

Soient $a_0, \ldots, a_n$ où $n \in \mathbb{N}$ des réels deux à deux distincts. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On considère l'application :

$$\psi : (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \longmapsto \sum_{k=0}^{n} P(a_k) \times Q(a_k).$$

1 - Montrer que $(\mathbb{R}_n[X], \psi)$ est un espace euclidien.

2 - On considère les polynômes de Lagrange $(L_0, \ldots, L_n)$ associés aux réels $a_0, \ldots, a_n$:

$$\forall i \in \{0,\ldots,n\} \quad L_i = \alpha_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (X - a_j) \qquad \text{avec} \qquad \alpha_i = 1/\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j).$$

Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ constitue une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire ψ.

Exercice 4 *(4 points)*

Soient $(E, <.,.>)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $(v_1, \ldots, v_p) \in E^p (p \in \mathbb{N}^*)$. On suppose les vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ linéairement indépendants. Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\phi(x) = \left\| \sum_{k=1}^{p} x_k v_k \right\|^2 \qquad \forall x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p,$$

où $\|.\|$ désigne la norme associée au produit scalaire $<.,.>$.

1 - Montrer que ϕ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^p$ dont on donnera la forme polaire associée.

2 - Déterminer le noyau de ϕ puis le rang de ϕ. Quelle est sa signature ?

3*- Que peut-on dire si on ne suppose plus les vecteurs $v_1, \ldots, v_p$ linéairement indépendants ?

INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON
CENTRE DE MATHEMATIQUES

Département du premier cycle
Cours de Mathématiques - Deuxième Année **2004-2005**
Groupe 52

Interrogation écrite III

Avertissement : les documents et calculatrices sont interdits. Durée 1h.
Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque. Le barème est donné à titre indicatif.

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Exercice 1 *(6 points)*

On considère l'espace vectoriel réel $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ s'annulant en 0. On rappelle que $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ est complet.

1 - Montrer que l'application $N : f \in E \longmapsto \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup\limits_{x\in[0,1]} |f'(x)|$ est une norme sur E.

2 - a) Montrer que si $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans (E, N), elle converge dans $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$.
b) Montrer que (E, N) est un espace vectoriel normé complet.

Exercice 2 *(4 points)*

Soient $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $k \in \mathcal{C}^0([0,1]^2,\mathbb{R})$ telle que $\sup_{(x,y)\in[0,1]^2} |k(x,y)| = \frac{1}{2}$. On considère l'application $\phi : g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \longmapsto \phi(g) \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ où $\phi(g)$ est définie par

$$\forall x \in [0,1] \quad \phi(g)(x) = f(x) + \int_0^1 k(x,y)\ g(y)\ \mathrm{d}y.$$

En utilisant le théorème du point fixe (que l'on énoncera précisément), montrer qu'il existe une unique application $g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ solution de l'équation de Volterra : $\forall x \in [0,1] \quad g(x) = f(x) + \int_0^1 k(x,y)\ g(y)\ \mathrm{d}y$.

Exercice 3 *(6 points)*

Soient $a_0, \dots, a_n$ où $n \in \mathbb{N}$ des réels deux à deux distincts. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On considère l'application :

$$\psi : (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \longmapsto \sum_{k=0}^{n} P(a_k) \times Q(a_k).$$

1 - Montrer que $(\mathbb{R}_n[X], \psi)$ est un espace euclidien.

2 - On considère les polynômes de Lagrange $(L_0, \dots, L_n)$ associés aux réels $a_0, \dots, a_n$:

$$\forall i \in \{0,\dots,n\} \quad L_i = \alpha_i \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (X - a_j) \quad \text{avec} \quad \alpha_i = 1/\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (a_i - a_j).$$

Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ constitue une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour le produit scalaire ψ.

Exercice 4 *(4 points)*

Soient $(E, < .,. >)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $(v_1, \dots, v_p) \in E^p (p \in \mathbb{N}^*)$. On suppose les vecteurs $v_1, \dots, v_p$ linéairement indépendants. Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\phi(x) = \left\| \sum_{k=1}^{p} x_k v_k \right\|^2 \quad \forall x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p,$$

où $\|.\|$ désigne la norme associée au produit scalaire $< .,. >$.

1 - Montrer que ϕ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^p$ dont on donnera la forme polaire associée.

2 - Déterminer le noyau de ϕ puis le rang de ϕ. Quelle est sa signature ?

3*- Que peut-on dire si on ne suppose plus les vecteurs $v_1, \dots, v_p$ linéairement indépendants ?

Solution des exercices

Rédigé par : Stéphane Balac, Centre de Mathématiques, INSA de Lyon.

Solution de l'exercice 1

1 - On a $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ pour tout $f \in E$.

a) On en déduit que pour tout $f \in E$ on a $N(f) \geq 0$ et que si $N(f) = 0$ alors $\|f\|_\infty = 0$ et $\|f'\|_\infty = 0$. Comme $\| \ \|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, il en résulte que $f = 0$.

b) De plus le fait que $\| \ \|_\infty$ est une norme implique que pour tout $(f,g) \in E^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} N(\lambda f) &= \|\lambda f\|_\infty + \|(\lambda f)'\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty + |\lambda|\|f'\|_\infty = |\lambda| N(f); \\ N(f+g) &= \|f+g\|_\infty + \|(f+g)'\|_\infty = \|f+g\|_\infty + \|f'+g'\|_\infty \\ &\leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty = N(f) + N(g). \end{aligned}$$

2 - a) Considérons une suite de Cauchy $(f_n)_n$ dans (E,N), i.e. vérifiant :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad \big(m \geq n \geq N \Longrightarrow N(f_n - f_m) \leq \varepsilon\big). \tag{1}$$

D'après l'assertion (1) on a :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad \big(m \geq n \geq N \Longrightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon\big) \tag{2}$$

et

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \quad \big(m \geq n \geq N \Longrightarrow \sup_{x\in[0,1]} |f_n'(x) - f_m'(x)| \leq \varepsilon\big). \tag{3}$$

On déduit de l'assertion (2) que la suite $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ qui est complet donc que la suite $(f_n)_n$ converge vers un élément $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ pour la norme $\| \ \|_\infty$.

b) On déduit par ailleurs de l'assertion (3) que la suite $(f_n')_n$ est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ qui est complet donc que la suite $(f_n')_n$ converge vers un élément $g \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ pour la norme $\| \ \|_\infty$.
Pour montrer que (E,N) est un espace vectoriel normé complet, il suffit de vérifier que $f' = g$ et que $f(0) = 0$.
La suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$, donc en particulier la suite converge simplement en 0 vers $f(0)$. Or pour tout entier n on a $f_n(0) = 0$ donc on a bien $f(0) = 0$.
Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, la suite $(f_n)_n$ converge simplement en 0 et la suite $(f_n')_n$ converge uniformément sur $[0,1]$. Il résulte du théorème « de dérivation d'une suite de fonction » que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et que $g = f'$.

Solution de l'exercice 2

Le théorème du point fixe de Picard indique que si ϕ est une application contractante d'un espace vectoriel normé complet $(E, \| \ \|)$ dans lui même, alors elle possède un unique point fixe. De plus la suite définie par récurrence par : $u_0 \in E$ et pour tout entier n par $u_{n+1} = \phi(u_n)$ converge vers ce point fixe.
Considérons $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\| \ \|_\infty$. $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$ est un espace vectoriel normé complet. Montrons que ϕ est une application contractante : soient $g_1, g_2 \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \|\phi(g_1) - \phi(g_2)\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} |\phi(g_1)(x) - \phi(g_2)(x)| \\ &= \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^1 k(x,y)\ g_1(y)\ \mathrm{d}\,y - \int_0^1 k(x,y)\ g_2(y)\ \mathrm{d}\,y \right| \\ &= \sup_{x\in[0,1]} \left| \int_0^1 k(x,y)\ (g_1(y) - g_2(y))\ \mathrm{d}\,y \right|. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 k(x,y)\ (g_1(y) - g_2(x))\ \mathrm{d}\,y \right| &\leq \int_0^1 |k(x,y)|\ |g_1(y) - g_2(y))|\ \mathrm{d}\,y \\ &\leq \int_0^1 \sup_{(x',y')\in[0,1]^2} \big|k(x',y')\big| \sup_{y'\in[0,1]} \big|g_1(y') - g_2(y'))\big|\ \mathrm{d}\,y \\ &= \sup_{(x',y')\in[0,1]^2} \big|k(x',y')\big| \sup_{y'\in[0,1]} \big|g_1(y') - g_2(y'))\big| \\ &= \frac{1}{2}\|g_1 - g_2\|_\infty. \end{aligned}$$

On en déduit que ϕ est contractante de rapport 1/2.

Remarque. L'espace $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\| \ \|_2$ n'est pas complet. Il est donc indispensable de choisir la norme $\| \ \|_\infty$ pour établir la contractance de ϕ.

Solution de l'exercice 3

1 - Rappelons que $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$ (cours de première année). C'est en effet un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$: le polynôme nul appartient à $\mathbb{R}_n[X]$ et si $P = \sum_{k=0}^n p_i X^i$ et $Q = \sum_{k=0}^n q_i X^i$ désignent deux polynômes de degré inférieur à n et λ, μ deux réels, le polynôme

$$\lambda P + \mu Q = \sum_{k=0}^n (\lambda p_i + \mu q_i) X^i$$

est de degré inférieur à n (éventuellement strictement !). La seule chose à vérifier est que ψ définit un produit scalaire.

Il est clair que ψ est symétrique $\psi(P,Q) = \psi(Q,P)$ pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Elle est linéaire par rapport à la première variable : soient λ_1, λ_2 deux réels et P_1, P_2, Q trois polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, on a

$$\begin{aligned} \psi(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2, Q) &= \sum_{k=0}^n (\lambda_1 P_1(a_k) + \lambda_2 P_2(a_k)) \times Q(a_k) \\ &= \lambda_1 \sum_{k=0}^n P_1(a_k) \times Q(a_k) + \lambda_2 \sum_{k=0}^n P_2(a_k) \times Q(a_k) \\ &= \lambda_1 \psi(P_1, Q) + \lambda_2 \psi(P_2, Q). \end{aligned}$$

ψ est donc une forme bilinéaire symétrique ; elle est définie positive puisque pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ on a

$$\psi(P,P) = \sum_{k=0}^n P(a_k) \times P(a_k) = \sum_{k=0}^n P(a_k)^2 \geq 0,$$

et on a $\psi(P,P) = 0$ si et seulement si $\sum_{k=0}^n P(a_k)^2 = 0$. Il s'agit d'une somme de carrés, donc $\psi(P,P) = 0$ si et seulement si $P(a_k) = 0$ pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$. Comme P est un polynôme de degré n et que les réels $a_0, \ldots, a_n$ sont deux à deux distincts, ceci implique que P admet $n+1$ racines. Un polynôme de degré n non nul admettant au plus n racines réelles, on en déduit que P est le polynôme nul.

2 - Les polynômes de Lagrange $(L_0, \ldots, L_n)$ constituent une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (voir le cours de première année). Pour le vérifier, il suffit d'établir que le système est libre car

$$\dim(L_0, \ldots, L_n) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1.$$

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des réels tels que $\sum_{k=0}^n \lambda_k L_k = 0$ (i.e. le polynôme nul). On a en particulier pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ $\sum_{k=0}^n \lambda_k L_k(a_i) = 0$ (i.e. le réel nul). Il est évident d'après la définition des polynômes de Lagrange que $L_k(a_i) = 1$ si $k = i$ et 0 sinon, de sorte que

$$\sum_{k=0}^n \lambda_k L_k(a_i) = \lambda_i \quad \forall i \in \{0, \ldots, n\}.$$

On en déduit que $\lambda_i = 0$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ et que le système est bien libre. Pour montrer que cette base est orthonormée, il reste à vérifier que

$$\psi(L_i, L_j) = 0 \quad \forall (i,j) \in \{0, \ldots, n\}^2 \quad i \neq j$$

et

$$\psi(L_i, L_i) = 1 \quad \forall i \in \{0, \ldots, n\}.$$

Soit $(i,j) \in \{0, \ldots, n\}^2$; on a

$$\psi(L_i, L_j) = \sum_{k=0}^n L_i(a_k) \times L_j(a_k) = \sum_{k=0}^n \delta_{ik} \times \delta_{jk}$$

où pour $(\ell,p) \in \mathbb{N}^2$ on a $\delta_{\ell p} = 1$ si $\ell = p$ et 0 sinon. Sous l'hypothèse $i \neq j$, les entiers i,j,k ne peuvent être simultanément égaux de sorte que pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$ on a $\delta_{ik} \times \delta_{jk} = 0$. Par ailleurs, pour tout $i \in \{0,\dots,n\}$ on a

$$\psi(L_i, L_i) = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k)^2 = \sum_{k=0}^{n} \delta_{ik} = 1.$$

Solution de l'exercice 4

1 - Notons $f : x \in \mathbb{R}^p \longmapsto \sum_{k=1}^{p} x_k v_k$. Il est clair que f est une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans E. Comme $\|.\|$ désigne la norme associée au produit scalaire $< .,. >$, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ on a :

$$\phi(x) = \left\langle \sum_{k=1}^{p} x_k v_k, \sum_{k=1}^{p} x_k v_k \right\rangle = < f(x), f(x) > .$$

L'application ϕ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^p$ si l'application $\psi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(x,y) = \frac{1}{4}\big(\phi(x+y) - \phi(x-y)\big) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$$

est une forme bilinéaire symétrique. Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ on a

$$\begin{aligned}
4\psi(x,y) &= \phi(x+y) - \phi(x-y) \\
&= < f(x+y), f(x+y) > - < f(x-y), f(x-y) > \\
&= < f(x)+f(y), f(x)+f(y) > - < f(x)-f(y), f(x)-f(y) > \\
&= < f(x), f(x) > +2 < f(x), f(y) > + < f(y), f(y) > \\
&\quad -\big(< f(x), f(x) > -2 < f(x), f(y) > + < f(y), f(y) >\big) \\
&= 4 < f(x), f(y) > .
\end{aligned}$$

On en déduit que $\psi : (x,y)\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \longrightarrow < f(x), f(y) >$. Comme f est une application linéaire et que $< .,. >$ est un produit scalaire, il est immédiat que ϕ est une forme bilinéaire symétrique.

> **Remarque.** L'introduction de l'application linéaire f a pour seul objectif de simplifier l'écriture de la forme quadratique et de faciliter les calculs.

2 - On a

$$\mathcal{N}(\phi) = \{x \in \mathbb{R}^p \ ; \ \forall y \in \mathbb{R}^p \ \psi(x,y) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^p \ ; \ \phi(x) = 0\}.$$

Si $x \in \mathcal{N}(\phi)$ alors $\|f(x)\|^2 =< f(x), f(x) >= 0$ donc $f(x) = 0$ car on a une norme. On en déduit que $x \in \ker(f)$. Comme il est évident que si $x \in \ker(f)$ alors $x \in \mathcal{N}(\phi)$, on en déduit que $\mathcal{N}(\phi) = \ker(f)$. Comme les vecteurs $v_1, \dots, v_p$ sont linéairement indépendants, on a

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k v_k = 0 \quad \Longrightarrow \quad (\forall k \in \{1,\dots,p\} \ x_k = 0).$$

On en déduit que $\mathcal{N}(\phi) = \ker(f) = \{0\}$. La forme quadratique ϕ est non dégénérée et de rang

$$\operatorname{rang}(\phi) = \dim(\mathbb{R}^p) - \dim(\mathcal{N}(\phi)) = p.$$

La forme quadratique ϕ est clairement positive : $\forall x \in \mathbb{R}^p \ \phi(x) = \|f(x)\|^2 \geq 0$. Sa signature est donc $(p,0)$.

3 - Si les vecteurs $v_1, \dots, v_p$ ne sont plus linéairement indépendants, on a d'après le théorème du rang :

$$\operatorname{rang}(\phi) = \dim(\mathbb{R}^p) - \dim(\mathcal{N}(\phi)) = p - \dim(\ker(f)) = \operatorname{rang}(f) = \operatorname{rang}(v_1, \dots, v_p).$$

La signature de la forme quadratique ϕ est alors $(r,0)$ où $r = \operatorname{rang}(\phi)$.
