Lanières L et M deuxième année
DEVOIR DE MATHEMATIQUES
jeudi 28 mars 2007
Durée : 1 heure 30

Les documents et calculatrices ne sont pas autorisés
Tout résultat doit être justifié, Chaque théorème utilisé doit être énoncé
Il sera tenu compte de la présentation
Le barème est donné à titre indicatif

Les exercices sont indépendants. Les résultats aux questions qui ne seront pas démontrés peuvent être admis pour répondre aux questions suivantes.

cours(4 points)
Nous supposons $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien canonique noté :

$$(x, y) \mapsto (x|y)$$

1. Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \qquad \big(ux|y\big) = \big(x|uy\big)$$

Montrer que si deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, sont vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes notées respectivement λ et μ alors ces vecteurs sont orthogonaux.

2. Que pouvez-vous dire de la matrice qui représente u dans une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien $(\mathbb{R}^n, (\cdot|\cdot))$? Montrez le résultat.

exercice 1.(6 points) Soit $\mathbb{R}^3$ muni de la structure euclidienne canonique définie par le produit scalaire

$$x = (x_1, x_2, x_3) \quad y = (y_1, y_2, y_3) \mapsto (x|y) = \sum_{i=1}^{i=3} x_i y_i$$

Soit A=(a_{ij}) la matrice

$$A \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Soit Q la forme quadratique de matrice A dans $\mathbb{R}^3$, vérifier que Q est définie positive.
2. Déterminer une base orthonormale (e'_1, e'_2, e'_3) de $(\mathbb{R}^3, (|))$ dans laquelle Q est représentée par une matrice diagonale.
3. Donner l'expression du produit scalaire φ associé à la forme quadratique Q dans la base canonique usuelle de $\mathbb{R}^3$ puis dans la base (e'_1, e'_2, e'_3). On écrira

$$x = \sum_{i=1}^{i=3} x'_i e'_i \quad y = \sum_{i=1}^{i=3} y'_i e'_i$$

4. On note $\|x\|_2 = \sqrt{(x|x)}$.
4.1 Exprimer $\|x\|_2^2$ et $Q(x)$ en fonction de x'_1, x'_2 et x'_3.
Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \quad \backslash \, \|x\|_2 = 1\}$
4.2 Montrer que Q admet un maximum M et un minimum m sur S. Quelles sont les valeurs de m et de M ?
4.3 Montrer que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$ $\sqrt{m}\|x\|_2 \leq \sqrt{Q(x)} \leq \sqrt{M}\|x\|_2$

exercice 2.
question A (6 points)

1. Montrer que l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ qui à u associe ln(1+u) est lipschitzienne de rapport 1.

2. En déduire que pour tous réels a et b :

$$|ln(1 + |a|) - ln(1 + |b|)| \leq |a - b|$$

3. E_1 désigne l'espace vectoriel des applications définies continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$. On suppose dans toute cette question que E_1 est muni de la norme $\| \quad \|_\infty$.
   (a) Montrer que l'application ϕ qui à tout élément f de E_1 associe l'élément $F = \phi(f)$ de E_1 défini par :

   $$\forall x \in [0,1] \quad F(x) = \int_0^x \quad t^2 \quad ln(1 + |f(t)|) \quad dt$$

   est contractante.
   (b) En déduire que ϕ admet un unique point fixe h_1.
   (c) Vérifier que h_1 est solution sur [0,1] de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ $y'(x) = x^2 ln(1 + y(x))$ et satisfait la condition initiale $h_1(0)$=0.

question B (4 points)

4. E_2 désigne l'espace vectoriel des applications définies continues de [0,2] dans $\mathbb{R}$.

   (a) Soit ρ l'application qui au réel x associe $\rho(x) = e^{-8x}$. Nous définissons une application N de E_2 dans $\mathbb{R}^+$ par :

   $$f \in E_2 \qquad N(f) = \sup_{x\in[0,2]} |\rho(x) \cdot f(x)| = \|\rho \cdot f\|_\infty$$

   1. Montrer que l'application N définit une norme sur E_2.
   2.Vérifier que cette norme est équivalente à la norme $\| \quad \|_\infty$

   (b) On note désormais ϕ l'application de E_2 dans E_2 qui associe l'élément à f, $F = \phi(f)$ définie par :

   $$\forall x \in [0,2] \quad F(x) = \int_0^x \quad t^2 \quad ln(1 + |f(t)|) \quad dt$$

   (c) Montrer que ϕ n'est pas contractante pour la norme $\| \quad \|_\infty$ sur E_2 .

   (d) Admettant que ϕ est contractante pour la norme N sur E_2. Pourquoi peut-on appliquer le théorème du point fixe à ϕ dans l'espace vectoriel normé (E_2,N) ? Comparer le point fixe h_2 ainsi obtenu à l'application h_1 définie précédemment.

barème- Lanières L et M deuxième année
DEVOIR DE MATHEMATIQUES

cours(4 points)
Nous supposons $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien canonique noté :

$$(x, y) \mapsto (x|y)$$

1. **Sous-total sur 2 points** Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \qquad (ux|y) = (x|uy)$$

Montrer que si deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, sont vecteurs propres de u associés à des valeurs propres distinctes notées respectivement λ et μ alors ces vecteurs sont orthogonaux.

Sur 0.5 point

$$x \in \mathbb{R}^n \qquad \text{et} \qquad ux \in \mathbb{R}^n \qquad ux = \lambda x \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

$$y \in \mathbb{R}^n \qquad \text{et} \qquad uy \in \mathbb{R}^n \qquad uy = \mu y \Rightarrow \mu \in \mathbb{R}$$

Sur 1 point

$$(ux|y) = \lambda(x|y) \qquad \text{et} \qquad (x|uy) = \mu(x|y)$$

Sur 0.5 point

$$(\lambda - \mu)(x|y) = 0 \Rightarrow (x|y) = 0$$

2. **Sous-total sur 2 points**

Que pouvez-vous dire de la matrice qui représente u dans une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien $(\mathbb{R}^n, (\cdot|\cdot))$? Montrez le résultat.

Sur 0.5 point
Si X et Y sont les matrices colonnes de x et de y dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n, (\cdot|\cdot)$

$$(x|y) =^t XY$$

Sur 0.5 point
Si A est la matrice de u dans une base orthonormée, pour tous les vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$ leurs matrices colonnes dans cette base vérifient :
$(ux|y) =^t (AX)Y =^t X^tAY \qquad \text{et} \qquad (x|uy) =^t X(AY) =^t XAY$
Sur 1 point
Les formes bilinéaires sur $\mathbb{R}^n$ de matrice A et ${}^tA$ coïncident donc $A =^t A$. A est une matrice symétrique.

exercice 1.(6 points) Soit $\mathbb{R}^3$ muni de la structure euclidienne canonique définie par le produit scalaire

$$x = (x_1, x_2, x_3) \quad y = (y_1, y_2, y_3) \mapsto (x|y) = \sum_{i=1}^{i=3} x_i y_i$$

Soit A=(a_{ij}) la matrice

$$A\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

1. **Sous-total sur 1 point** Soit Q la forme quadratique de matrice A dans $\mathbb{R}^3$, vérifier que Q est définie positive.

Sur 0,5 point
Les valeurs propres de A comptées avec leur ordre de muliplicité sont $4, 4, 6$.
Sur 0,5 point
la signature de Q est $(3, 0)$ et en particulier Q est définie positive.

2. **Sous-total sur 1 point** Déterminer une base orthonormale (e_1', e_2', e_3') de $(\mathbb{R}^3, (|))$ dans laquelle Q est représentée par une matrice diagonale.

Les vecteurs propres calculés sont orthogonaux 2 à 2. Il suffit de normer ces vecteurs. Par exemple :

$$e_1' = (1, 0, 0), \quad e_2' = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad e_3' = (0, \frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

3. **Sous-total sur 1 point** Donner l'expression du produit scalaire φ associé à la forme quadratique Q dans la base canonique usuelle de $\mathbb{R}^3$ puis dans la base (e_1', e_2', e_3'). On écrira

$$x = \sum_{i=1}^{i=3} x_i' e_i' \quad y = \sum_{i=1}^{i=3} y_i' e_i'$$

Sur 0,5 point

Dans la base canonique usuelle

$$\varphi(x, y) = 4x_1y_1 + 5x_2y_2 + 5x_3y_3 - (x_2y_3 + x_3y_2)$$

Sur 0,5 point
Dans la base (e_1', e_2', e_3').

$$\varphi(x, y) = 4x_1'y_1' + 4x_2y_2 + 6x_3y_3$$

4. **Sous-total sur 3 points** On note $\|x\|_2 = \sqrt{(x|x)}$.

4.1 **Sous-total sur 1 point** Exprimer $\|x\|_2^2$ et $Q(x)$ en fonction de x_1', x_2' et x_3'.

Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \quad \backslash \|x\|_2 = 1\}$

Sur 0,5 point
Dans une base orthonormée l'expression de la norme euclidienne est : .

$$\|x\|_2{}^2 = {x_1'}^2 + {x_2'}^2 + {x_3'}^2$$

Sur 0,5 point
Selon l'expression de la matrice de Q dans cette base : .

$$Q(x) = 4{x'_1}^2 + 4{x'_2}^2 + 6{x'_3}^2$$

4.2 **Sous-total sur 1 point** Montrer que Q admet un maximum M et un minimum m sur S. Quelles sont les valeurs de m et de M ?

Sur 0,5 point
Q définit une application continue du fermé borné S dans $\mathbb{R}$. Elle est donc bornée et atteint son maximum M et son minimum m sur S.
Sur 1 point(non cumulable avec le demi-point précédent sauf si l'étudiant a montré S fermé)

$$4({x'_1}^2 + {x'_2}^2 + {x'_3}^2) \leq 4{x'_1}^2 + 4{x'_2}^2 + 6{x'_3}^2 \leq 6({x'_1}^2 + {x'_2}^2 + {x'_3}^2) \qquad (1)$$

D'où pour tout élément x de S

$$4 \leq 4{x'_1}^2 + 4{x'_2}^2 + 6{x'_3}^2 \leq 6$$

4.3 **Sous-total sur 1 point** Montrer que pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^3$ $\sqrt{m}\|x\|_2 \leq \sqrt{Q(x)} \leq \sqrt{M}\|x\|_2$
A partir de la question précédente en repartant de (1) ou en partant du résultat appliqué à $\dfrac{x}{\|x\|_2}$

exercice 2.
question A (6 points)

1. **Sur 1 point** Montrer que l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ qui à u associe ln(1+u) est lipschitzienne de rapport 1.
   Théorème des Accroissements finis appliqué à $u \mapsto ln(1+u)$ sur le segment d'extrémités α et β.

   $$|ln(1+\alpha) - ln(1+\beta)| \leq |\alpha - \beta|$$

2. **Sur 1 point** En déduire que pour tous réels a et b :

   $$|ln(1+|a|) - ln(1+|b|)| \leq |a-b|$$

   On applique le résultat précédent à $\alpha = |a|$ et $\beta = |b|$

   $$|ln(1+|a|) - ln(1+|b|)| \leq ||a| - |b||$$

   Et

   $$||a| - |b|| \leq |a-b|$$

3. **Sous-total sur 4 points** E_1 désigne l'espace vectoriel des applications définies continues de [0,1] dans $\mathbb{R}$. On suppose dans toute cette question que E_1 est muni de la norme $\| \ \|_\infty$.

   (a) **Sur 2 points** Montrer que l'application ϕ qui à tout élément f de E_1 associe l'élément $F = \phi(f)$ de E_1 défini par :

   $$\forall x \in [0,1] \quad F(x) = \int_0^x \quad t^2 \quad ln(1 + |f(t)|) \quad dt$$

   est contractante.

   Introduisant f et g éléments quelconques de E_1

   $$\forall x \in [0,1] \quad |F(x) - G(x)| \leq \int_0^x \quad t^2 \quad |ln(1+|f(t)|) - ln(1+|g(t)|)| \quad dt$$

   $$\leq \int_0^x \quad t^2 \quad \|f-g\|_\infty \quad dt \leq \frac{1}{3}\|f-g\|_\infty$$

   ϕ est contractante de rapport $\frac{1}{3}$.

   (b) **Sur 1 point** En déduire que ϕ admet un unique point fixe h_1.

   ϕ est une application contractante de l'espace vectoriel normé complet $(E_1, \|\cdot\|_\infty)$ dans lui-même donc elle admet selon le théorème du point fixe, un unique point fixe h_1.

   (c) **Sur 1 point** Vérifier que h_1 est solution sur [0,1] de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$ $y'(x) = x^2 ln(1 + |y(x)|)$ et satisfait la condition initiale $h_1(0)=0$.

   h_1 est dérivable comme primitive de l'application continue $x \mapsto ln(1 + |h_1(x)|)$ et a pour dérivée cette application. De plus h_1 est la primitive nulle en 0 de cette application.

question B (4 points)

4. E_2 désigne l'espace vectoriel des applications définies continues de [0,2] dans $\mathbb{R}$.

   (a) **Sous-total sur 2.5 point** Soit ρ l'application qui au réel x associe $\rho(x) = e^{-8x}$. Nous définissons une application N de E_2 dans $\mathbb{R}^+$ par :

   $$f \in E_2 \qquad N(f) = \sup_{x \in [0,2]} |\rho(x) \cdot f(x)| = \|\rho \cdot f\|_\infty$$

   1. **Sur 1.5 point** Montrer que l'application N définit une norme sur E_2.

   Puisque la norme $\|\cdot\|_\infty$ est séparable

   $$N(f) = 0 \Rightarrow \|\rho f\|_\infty = 0 \Rightarrow \rho f \equiv 0$$

   Puisque ρ ne s'annule pas

   $$\forall x \in E \qquad \rho(x) f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

De même pour l'homogénéité

$$\forall k \in \mathbb{R} \quad N(kf) = \|k\rho f\|_\infty = |k|\|\rho f\|_\infty = |k|N(f)$$

De même pour l'inégalité triangulaire.

2. **Sur 1 point** Vérifier que cette norme est équivalente à la norme $\| \quad \|_\infty$
x élément quelconque de $[0, 2]$:

$$e^{-16}|f(x)| \leq |\rho(x)f(x)| \leq |f(x)| \Rightarrow e^{-16}\|f\|_\infty \leq \|\rho f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$$

On note désormais ϕ l'application de E_2 dans E_2 qui associe l'élément à f, $F = \phi(f)$ définie par :

$$\forall x \in [0, 2] \quad F(x) = \int_0^x \quad t^2 \quad ln(1 + |f(t)|) \quad dt$$

(b) **Sur 1 point** Montrer que ϕ n'est pas contractante pour la norme $\| \quad \|_\infty$ sur E_2 .
Il suffit de trouver des applications particulières f et g telles que si $F = \phi(f)$ et $G = \phi(g)$:

$$\|g - f\|_\infty \leq \|G - F\|_\infty$$

Or, l'image F de la fonction nulle f est la fonction nulle et l'image G de la fonction constante égale à 1 prend en 1 la valeur $8ln2$. Il vient

$$1 = \|g - f\|_\infty \qquad 8ln2 = G(1) - F(1) \leq \|G - F\|_\infty$$

(c) **Sous-total sur 1,5 point**
Sur 1 point Admettant que ϕ est contractante pour la norme N sur E_2. Pourquoi peut-on appliquer le théorème du point fixe à ϕ dans l'espace vectoriel normé (E_2,N) ?
La norme N équivalente à la norme $\| \cdot \|_\infty$ confère à E_2 d'une structure d'espace vectoriel normé complet. Il est donc possible d'appliquer le théorème du point fixe à Φ application contractante dans l'espace vectoriel normé complet (E_2, N).
Sur 0,5 point Comparer le point fixe h_2 ainsi obtenu à l'application h_1 définie précédemment.
Si h_2 est point fixe dans E_2, sa restriction à $[0, 1]$ est point fixe de l'applications Φ considérée comme application de E_1 dans lui-même. L'unicité du point fixe de Φ considérée comme application de E_1 dans lui-même montre que h_1 est la restriction de h_2 à $[0, 1]$.