Interrogation de mathématiques durée 1h30

La notation prend en compte la présentation

A. Fonction continue, signe et compacité

On considère la fonction à valeurs réelles F définie par :

$$\begin{array}{l} F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2. \end{array} \tag{1}$$

1. Réduire la forme quadratique et montrer que F est minorée sur $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}^3$. Est-elle majorée sur $\mathbb{R}^3$?
3. Soit S la sphère unité : $S = \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = 1\}$. Sans faire de calculs, montrer que F atteint son maximum sur S.
4. En utilisant la question 1, calculer le maximum de F sur S.

B. Point fixe (changement de Norme)

On veut résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) + \frac{1}{2}(y^5(t) + y^3(t)) = 0 \text{ pour } 0 < t < 1 \\ y(0) = 1. \end{array} \right. \tag{2}$$

Pour cela on considère l'espace $E = C^0([0,1];[0,1])$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, montrer que

$$|\varphi|_\infty = \sup_{0 \le s \le 1} |(1+s)^{-n}\varphi(s)|$$

définit une norme sur E équivalente à la norme $\|\|_\infty$.

2. Pour $u, w \in E$, montrer l'existence d'une constante positive k vérifiant :

$$\forall t \in [0,1], |u^5(t) + u^3(s) - w^5(t) - w^3(t)| \le k|u(t) - w(t)|$$

que l'on évaluera.

3. Soit ψ donnée montrer la majoration suivante :

$$|\int_0^t \psi(s)\, ds| = |\int_0^t (1+s)^n (1+s)^{-n} \psi(s)\, ds| \le \frac{2}{n+1}(1+t)^n |\psi|_\infty \tag{3}$$

4. Soit l'application ϕ

$$\begin{array}{llll} \phi : & (E, |\cdot|_\infty) & \to (E, |\cdot|_\infty) \\ z & & \mapsto \phi(z) : t \mapsto 1 - \frac{1}{2}\int_0^t z^5(s) + z^3(s)\, ds \end{array} \tag{4}$$

5. Montrer que

$$\forall t \in [0,1]\, |\phi(u)(t) - \phi(w)(t)|(1+t)^{-n} \leq \frac{k}{n+1}|u-w|_\infty \tag{5}$$

6. Choisir n pour que l'application ϕ soit contractante et montrer l'existence d'une unique solution v à l'equation :

$$v = \phi(v) \tag{6}$$

7. Montrer que la fonction v vérifie l'équation différentielle (2).

C. Question de cours

Soit α un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Montrer que si deux valeurs propres sont distinctes, alors des vecteurs propres associés sont orthogonaux.

Corrigé inloro 28-03-2007.

A1) $F(x_1,x_2,x_3) = X^t A X \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)\lambda(-3+\lambda).$

$\lambda=0 \quad V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 1 \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda = 3, \ V_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dans $\{V_i\}_{i=1}^{3}$ on a $F(Y_1,Y_2,Y_3) = Y_2^2 + 3Y_3^2$. $F(Y_1,Y_2,Y_3) \geq 0$.

A2) F est continue car F est un polynôme de degré 2.
Sur $\mathbb{R}^3$ F n'est pas bornée.

A3) S est un fermé borné de $\mathbb{R}^3$ donc Compact. Toute fonction continue atteint ses bornes sur un compact. Donc F est majorée.

A4) $\sup_{\|Y\|=1} F(Y_1,Y_2,Y_3) = \sup_{\|Y\|=1} Y_2^2 + 3Y_3^2 \geqslant 3$ en choisissant $Y_3=1$

Comme Y_1 n'intervient pas plaçons nous sur $Y_2^2+Y_3^2=1$
éliminons $Y_3^2 = 1-Y_2^2$ et ainsi $F(Y_1,Y_2,Y_3) = 3-Y_2^2 \leq 3$ □

B1) $\frac{1}{2^n} \leq (1+s)^{-n} \leq 1$ d'où $\frac{1}{2^n}\|\varphi\|_\infty \leq |\varphi|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$.

B2) $|u^5(t)-w^5(t) + u^3(t) - w^3(t)| \leq |u^5(t)-w^5(t)| + |u^3(t)-w^3(t)|$
$\leq |u(t)-w(t)|\,|u^4(t) + u^3(t)w(t) + u^2(t)w^2(t) + u(t)w^3(t) + w^4(t)| +$
$|(u-w)(t)|\,|u^2(t) + u(t)w(t) + w^2(t)|$
$\leq |u(t)-w(t)|[5+3]$ $\qquad \underline{k=8.}$

B3) $\left|\int_0^t (1+s)^n (1+s)^{-n}\varphi(s)\,ds\right| \leq \int_0^t (1+s)^n ds \sup_{0\leq t\leq 1} |(1+t)^{-n}\varphi(t)| = \frac{2(1+t)^n}{n+1}|\varphi|_\infty$

B4) $\phi \ E \to E$
i) z à valeurs ds $[0,1] \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2}\int_0^t z^5(s) + z^3(s)\,ds \leq 1$
donc $\phi(z)(t) \in [0,1]$