

INTERROGATION ÉCRITE IV

Avertissement : les documents et calculatrices sont interdits. Durée 1h.

Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque. Le barème est donné à titre indicatif.

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Tout résultat du cours utilisé devra être très précisément énoncé.

EXERCICE 1 (7 points)

- 1 - Montrer que la relation : $\sin(y) + xy^4 + x^2 = 0$ définit implicitement y en fonction de x au voisinage de $(0, 0)$.
- 2 - Donner l'équation de la tangente en $(0, 0)$ à la courbe d'équation $\sin(y) + xy^4 + x^2 = 0$.
- 3 - Déterminer le développement limité à l'ordre 4 de la fonction $x \mapsto y$ au voisinage de 0.

EXERCICE 2 (4 points)

Déterminer les extrema (en précisant leur nature) de la fonction $f : (x, y) \mapsto x \ln(x) + y \ln(y)$.

EXERCICE 3 (9 points)

On cherche à déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$(\mathcal{E}) \quad f(x, y) \times \left(x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = -(x^2 + y^2).$$

- 1 - Énoncer très précisément le théorème d'inversion locale.
- 2 - Montrer que la fonction $\phi : (x, y) \mapsto (y/x, x^2 + y^2)$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
- 3 - Pour f solution de classe $\mathcal{C}^1$ de l'équation $(\mathcal{E})$, on considère la fonction g définie par $f(x, y) = g(\phi(x, y))$. Calculer les dérivées partielles premières de f en fonction de celles de g .
- 4 - Montrer que :

$$2 g(u, v) \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = -1.$$

- 5 - En déduire la forme des solutions de l'équation $(\mathcal{E})$.
-

INTERROGATION ÉCRITE IV

Avertissement : les documents et calculatrices sont interdits. Durée 1h.

Les exercices peuvent être traités dans un ordre quelconque. Le barème est donné à titre indicatif.

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Tout résultat du cours utilisé devra être très précisément énoncé.

EXERCICE 1 (7 points)

- 1 - Montrer que la relation : $\sin(y) + xy^4 + x^2 = 0$ définit implicitement y en fonction de x au voisinage de $(0, 0)$.
- 2 - Donner l'équation de la tangente en $(0, 0)$ à la courbe d'équation $\sin(y) + xy^4 + x^2 = 0$.
- 3 - Déterminer le développement limité à l'ordre 4 de la fonction $x \mapsto y$ au voisinage de 0.

EXERCICE 2 (4 points)

Déterminer les extrema (en précisant leur nature) de la fonction $f : (x, y) \mapsto x \ln(x) + y \ln(y)$.

EXERCICE 3 (9 points)

On cherche à déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$(\mathcal{E}) \quad f(x, y) \times \left(x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = -(x^2 + y^2).$$

- 1 - Énoncer très précisément le théorème d'inversion locale.
- 2 - Montrer que la fonction $\phi : (x, y) \mapsto (y/x, x^2 + y^2)$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
- 3 - Pour f solution de classe $\mathcal{C}^1$ de l'équation $(\mathcal{E})$, on considère la fonction g définie par $f(x, y) = g(\phi(x, y))$. Calculer les dérivées partielles premières de f en fonction de celles de g .
- 4 - Montrer que :

$$2 g(u, v) \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = -1.$$

- 5 - En déduire la forme des solutions de l'équation $(\mathcal{E})$.
-

Rédigé par : Stéphane Balac, Centre de Mathématiques, INSA de Lyon.

Solution de l'exercice 1

1 - Considérons le théorème des fonctions implicites dans $\mathbb{R}^2$:

Soit f une fonction d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$). Soit $a = (a_1, a_2) \in U$ tel que

$$f(a_1, a_2) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_2 f(a_1, a_2) \neq 0.$$

Il existe alors un voisinage $\tilde{A}$ de a_1 dans $\mathbb{R}$ et un voisinage $\hat{A}$ de a_2 dans $\mathbb{R}$ tel que

$$S = \{(x_1, x_2) \in \tilde{A} \times \hat{A} \mid f(x_1, x_2) = 0\}$$

soit le graphe d'une fonction ϕ de $\tilde{A}$ dans $\hat{A}$ de classe $\mathcal{C}^p$.

La fonction ϕ est implicitement déterminée par la relation $f(x, \phi(x)) = 0$ et sa dérivée est donnée par

$$\phi'(x) = -\frac{\partial_1 f(x, \phi(x))}{\partial_2 f(x, \phi(x))}.$$

Définissons la fonction $f : (x, y) \mapsto \sin(y) + xy^4 + x^2$ et vérifions qu'elle satisfait aux hypothèses du théorème avec $a = (0, 0)$. Cette fonction est clairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. On a bien $f(a_1, a_2) = 0$ et $\partial_2 f(a_1, a_2) = \cos(a_2) + 4a_1 a_2^3 = 1 \neq 0$. Il existe alors un voisinage $\tilde{A}$ de 0 dans $\mathbb{R}$ et un voisinage $\hat{A}$ de 0 dans $\mathbb{R}$ et une fonction $\phi : x \in \tilde{A} \mapsto y \in \hat{A}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que

$$\forall (x, y) \in \tilde{A} \times \hat{A} \quad \left(f(x, y) = 0 \iff y = \phi(x) \right).$$

Comme $\partial_1 f(x, y) = y^4 + 2x$ et $\partial_2 f(x, y) = \cos(y) + 4xy^3$, on a

$$\phi'(x) = -\frac{\phi(x)^4 + 2x}{\cos(\phi(x)) + 4x\phi^3(x)}.$$

2 - L'équation de la tangente à la courbe en $(0, 0)$ est $y = \phi(0) + x\phi'(0)$ soit $y = 0$. La tangente est donc une tangente horizontale.

3 - Commençons par remarquer que ϕ étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage de 0, elle admet des développements limités à tout ordre en 0 (théorème de Taylor-Young). Toutefois, il semble un peu téméraire de vouloir calculer les dérivées successives de ϕ jusqu'à l'ordre 4 pour appliquer la formule de Taylor-Young.

Comme $\phi(0) = 0$, la fonction ϕ admet en 0 un développement limité à l'ordre 4 de la forme

$$\phi(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4 + \mathcal{O}_0(x^4).$$

Partons de la relation $f(x, \phi(x)) = 0$ pour tout $x \in \tilde{A}$. On a $\sin(u) = u - \frac{1}{6}u^3 + \mathcal{O}_0(u)$ de sorte que

$$\begin{aligned} f(x, \phi(x)) &= \sin(\phi(x)) + \underbrace{x\phi(x)^4}_{=\mathcal{O}_0(x^4)} + x^2 \\ &= (\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4) + \frac{1}{6}(\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4) + x^2 + \mathcal{O}_0(x^4) \\ &= \alpha_1 x + (\alpha_2 + 1)x^2 + \left(\frac{1}{6}\alpha_1 + \alpha_3\right)x^3 + \alpha_4 x^4 + \mathcal{O}_0(x^4). \end{aligned}$$

La relation $f(x, \phi(x)) = 0$ pour tout $x \in \tilde{A}$ et l'unicité du développement limité pour une fonction donnée au voisinage de 0 impliquent les relations

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 + 1 = 0, \quad \frac{1}{6}\alpha_1 + \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 0.$$

On en déduit que le développement limité à l'ordre 4 de ϕ en 0 est

$$\phi(x) = -x^2 + \mathcal{O}_0(x^4).$$

Solution de l'exercice 2

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet ensemble. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ on a

$$\partial_1 f(x, y) = \ln(x) + 1, \quad \partial_2 f(x, y) = \ln(y) + 1$$

et

$$\partial_{1,1}^2 f(x, y) = \frac{1}{x}, \quad \partial_{2,2}^2 f(x, y) = \frac{1}{y}, \quad \partial_{1,2}^2 f(x, y) = \partial_{2,1}^2 f(x, y) = 0.$$

On en déduit que f admet pour unique point critique le point $(1/e, 1/e)$. La matrice Hessienne en ce point est $\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$. Cette matrice est clairement symétrique définie positive (elle admet e comme valeur propre double). Le point critique est donc un minimum.

Solution de l'exercice 3

1 - Voir le cours.

2 - Considérons les ouverts $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et $V = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. L'application ϕ est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

Montrons que ϕ est injective. Soient $(x_1, y_1) \in U$ et $(x_2, y_2) \in U$ tels que $\phi(x_1, y_1) = \phi(x_2, y_2)$. On a

$$\begin{cases} \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \\ x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \arctan\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = \arctan\left(\frac{y_2}{x_2}\right) \\ x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 \end{cases}.$$

Les complexes $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ ont donc même module et même argument (dans $]0, \pi/2[$). Ils sont donc égaux et $x_1 = x_2, y_1 = y_2$.

Montrons que ϕ est surjective. On a clairement $\phi(U) \subset V$. Montrons que $V \subset \phi(U)$: soit $(u, v) \in V$, montrons qu'il existe $(x, y) \in U$ tel que $(u, v) = \phi(x, y)$. On a

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = x^2 + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = xu \\ v = x^2(1 + u^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{v}{1 + u^2} \\ y = ux \end{cases}.$$

Si $u > 0$ et $v > 0$ on a $x = \sqrt{\frac{v}{1 + u^2}}$ et $y = u\sqrt{\frac{v}{1 + u^2}}$ qui sont bien définis et $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ donc ϕ est surjective.

REMARQUE. L'interprétation des relations $u = \frac{y}{x}$ et $v = x^2 + y^2$ en tant que module et argument du nombre complexe $z = x + iy$ permet de conclure directement à la bijectivité de ϕ .
Le calcul qui vient d'être effectué donne l'expression de ϕ^{-1} :

$$\phi^{-1} : (u, v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \left(\sqrt{\frac{v}{1 + u^2}}, u\sqrt{\frac{v}{1 + u^2}} \right).$$

Pour montrer que ϕ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on peut :

- i - montrer que ϕ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V (ce qui est évident à établir si on dispose de l'expression de ϕ^{-1} donnée ci-dessus) ;
- ii - utiliser le corollaire suivant du théorème d'inversion locale :

Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, U un ouvert de E et V un ouvert de F et f une application de U dans V . Si,

1. *ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ,*
2. *ϕ est une bijection de U dans V ,*
3. *pour tout $a \in U$, la différentielle de ϕ en a est une bijection de E dans F ,*

alors ϕ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de U dans V .

Pour appliquer le corollaire du théorème d'inversion locale, reste à montrer que pour tout $(x, y) \in U$, la différentielle de ϕ en (x, y) est une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Pour cela, il suffit de calculer la matrice Jacobienne de ϕ en $(x, y) \in U$. On a

$$J_\phi(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 2x & 2y \end{pmatrix}.$$

Son déterminant vaut $\det(J_\phi(x, y)) = -2(\frac{y^2}{x^2} + 1) < 0$ car $y \neq 0$ si $(x, y) \in U$. Comme pour tout $(x, y) \in U$ le jacobien est non nul, la différentielle de ϕ en (x, y) est bien une bijection de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ pour tout $(x, y) \in U$.

3 - En utilisant la formule de dérivation composée, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(\phi(x, y)) &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x, y) \partial_1 g(\phi(x, y)) + \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(x, y) \partial_2 g(\phi(x, y)) \\ &= -\frac{y}{x^2} \partial_1 g(y/x, x^2 + y^2) + 2x \partial_2 g(y/x, x^2 + y^2) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(\phi(x, y)) &= \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(x, y) \partial_1 g(\phi(x, y)) + \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(x, y) \partial_2 g(\phi(x, y)) \\ &= \frac{1}{x} \partial_1 g(y/x, x^2 + y^2) + 2y \partial_2 g(y/x, x^2 + y^2).\end{aligned}$$

4 - On déduit des calculs précédents que :

$$\begin{aligned}(\mathcal{E}) &\Leftrightarrow f(x, y) \left(x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = -(x^2 + y^2) \\ &\Leftrightarrow g(\phi(x, y)) \left(x \left(-\frac{y}{x^2} \partial_1 g(\phi(x, y)) + 2x \partial_2 g(\phi(x, y)) \right) + y \left(\frac{1}{x} \partial_1 g(\phi(x, y)) + 2y \partial_2 g(\phi(x, y)) \right) \right) \\ &\quad = -(x^2 + y^2) \\ &\Leftrightarrow g(u, v) \left(u \partial_1 g(u, v) + 2v \partial_2 g(u, v) - u \partial_1 g(u, v) \right) = -v \\ &\Leftrightarrow 2g(u, v) \partial_2 g(u, v) = -1.\end{aligned}$$

5 - Pour résoudre l'équation $(\mathcal{E}_2) : 2g(u, v) \partial_2 g(u, v) = -1$, introduisons pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$ la fonction $h_u : v \in \mathbb{R}_+^* \mapsto g(u, v)$. La fonction h_u est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$2h_u(v) h'_u(v) = -1.$$

Or $2h_u(v) h'_u(v) = (h_u(v)^2)'$ donc $h_u(v)^2 = -v + C_u$ où C_u est une fonction ne dépendant que de u (donc constante relativement à la variable v). On en déduit que

$$g(u, v)^2 = -v + C(u)$$

puis que les solutions de l'équation $(\mathcal{E})$ sont les fonctions f vérifiant

$$f(x, y)^2 = -(x^2 + y^2) + C(y/x)$$

où C est une fonction réelle quelconque de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ la condition $C(y/x) \geq x^2 + y^2$.
