Mécanique générale

Etude cinématique d'une transmission

Le schéma cinématique du mécanisme étudié est donné sur la figure 1 (cf. feuille jointe). La figure 2 (cf. feuille jointe) est une représentation en perspective du disque S_2.

L'arbre d'entrée S_1 est en liaison pivot d'axe $(P, \vec{x}_0)$ avec le bâti S_0. Le paramètre de mouvement associé à cette liaison est : $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.

Le disque S_2 est en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_{1*})$ avec l'arbre d'entrée S_1. Le paramètre de mouvement associé à cette liaison est : $\gamma = (\vec{x}_{1*}, \vec{x}_2)$.

L'arbre de sortie S_3 est en liaison pivot d'axe $(O, \vec{x}_0)$ avec le bâti S_0. Le paramètre de mouvement associé à cette liaison est : $\delta = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$.

Par ailleurs, nous supposerons que les contacts en I et J s'effectuent sans glissement.

1. - Quelle est la nature des conditions imposées par les contacts géométriques en I et J (conditions de montage ou équations de liaison) ? Traduire ces conditions et en déduire les distances HJ, OC, OP et OH en fonction de R et β.

2. - Etablir les relations traduisant le non glissement en I et J, en déduire la mobilité du système.

3. - Calculer les vecteurs roulement et pivotement en I en fonction de $\dot{\alpha}$ et β.

4. - Déterminer l'axe de viration du mouvement 2/0, en déduire les surfaces axoïdes de ce mouvement.

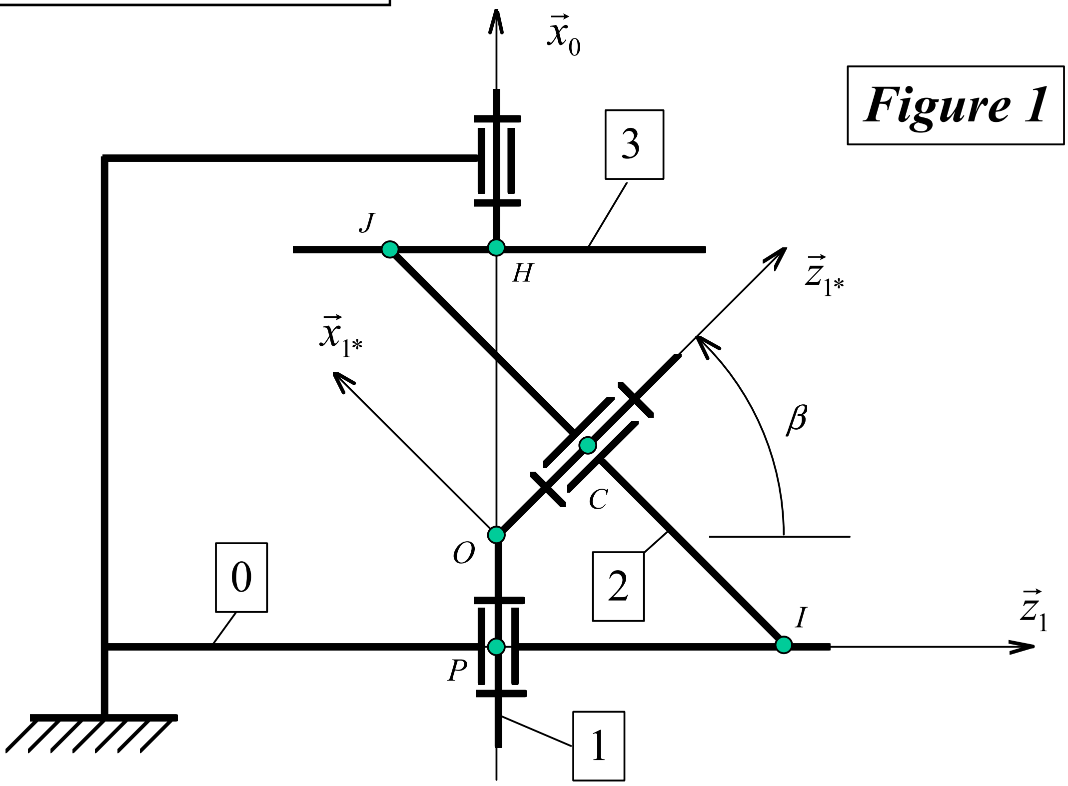
5. - Même question pour le mouvement 2/3.

6. - Calculer l'accélération dans R_0 du point géométrique I et de ce même point lié au disque S_2. Ces deux résultats seront exprimés dans le repère R_1 en fonction de $\dot{\alpha}^2$ et des paramètres géométriques R et β.

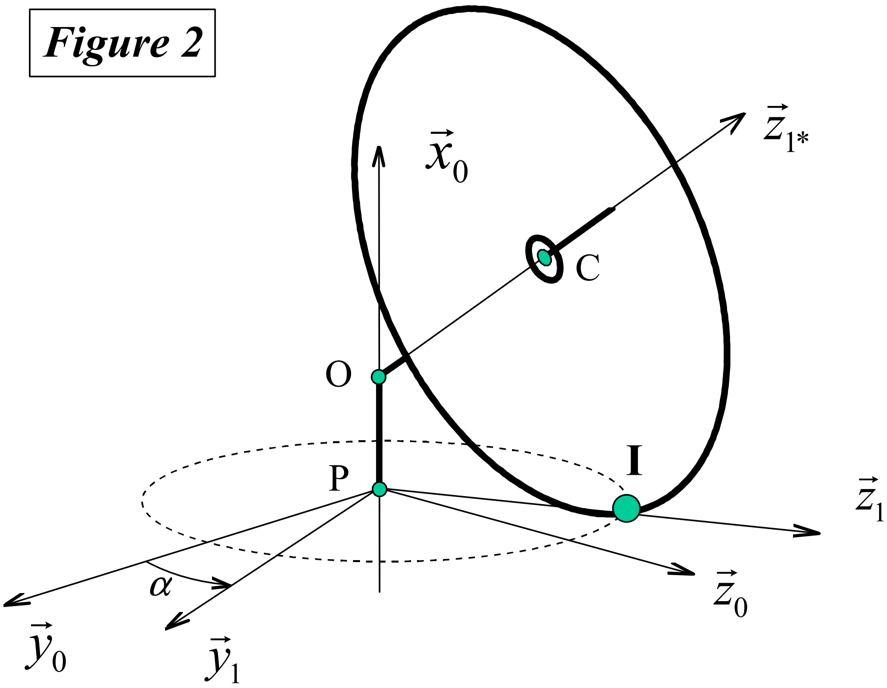
C. Bard, E. Chatelet & L. Manin

Nom :

Groupe :



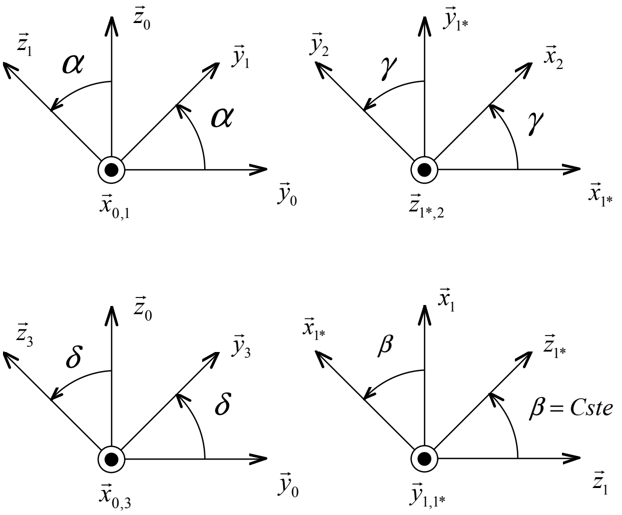
$$\left\|\vec{PI}\right\| = \left\|\vec{CI}\right\| = \left\|\vec{CJ}\right\| = R \qquad \beta = Cste$$

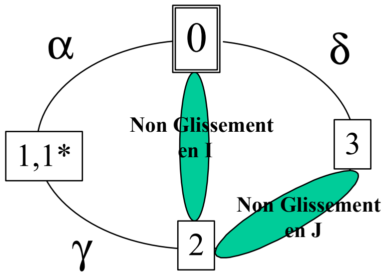


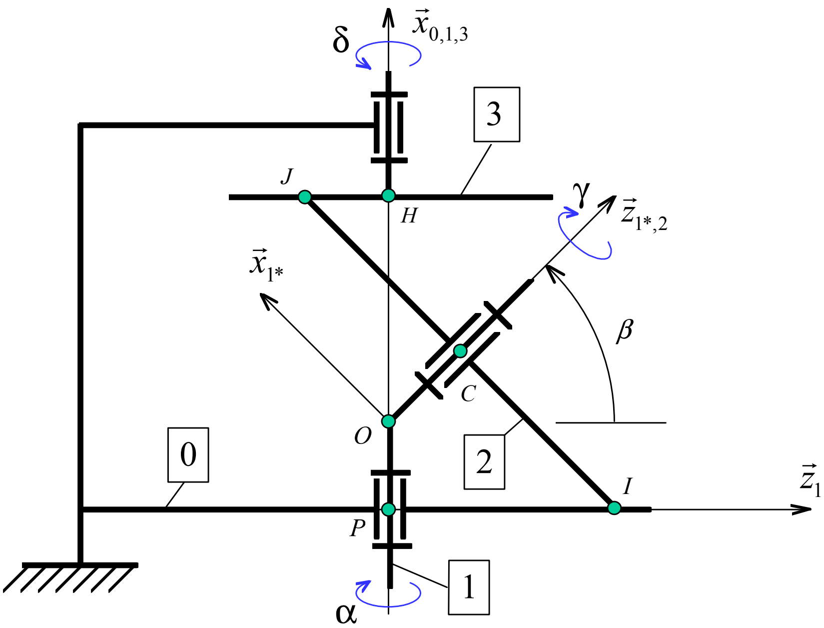
Mécanique générale

Etude cinématique d'une transmission - Correction

I - Figures de changement de base, graphe des liaisons et schéma cinématique.







$\|\vec{PI}\| = \|\vec{CI}\| = \|\vec{CJ}\| = R \qquad \beta = Cste$

II - Conditions imposées par le contact géométrique en I et J.

II.1 - Contact en I

Le contact en I impose : $\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CI} = \vec{0}$ soit : $-R.\vec{z}_1 + \|\vec{PO}\|.\vec{x}_{0,1,3} + \|\vec{OC}\|.\vec{z}_{1*} - R.\vec{x}_{1*} = \vec{0}$

Il vient donc :

$$\boxed{\|\vec{OC}\| = \|\vec{OP}\| = \frac{R.(1-\sin\beta)}{\cos\beta}}$$

II.1 - Contact en J

Le contact en J impose : $\overrightarrow{JH} + \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CJ} = \vec{0}$ soit : $\|\vec{JH}\|.\vec{z}_1 - \|\vec{HO}\|.\vec{x}_{0,1,3} + \|\vec{OC}\|.\vec{z}_{1*} + R.\vec{x}_{1*} = \vec{0}$

Il vient donc :

$$\boxed{\begin{cases} \|\vec{OH}\| = \dfrac{R.(\cos^2\beta + \sin\beta.(1-\sin\beta))}{\cos\beta} = \dfrac{R.(\cos 2\beta + \sin\beta)}{\cos\beta} \\ \\ \|\vec{JH}\| = R.(2.\sin\beta - 1) \end{cases}}$$

Ces conditions relient des paramètres géométriques, ce sont donc des conditions de montage.

III - Non glissement en I et J.

Les conditions de non glissement en I et J conduisent à : $\overrightarrow{V_2^0(I)} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{V_2^3(J)} = \vec{0}$. Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_2^0(I)} &= \overrightarrow{V_2^1(I)} + \overrightarrow{V_1^0(I)} = \overrightarrow{IC} \wedge \overrightarrow{\Omega_2^1} + \overrightarrow{IP} \wedge \overrightarrow{\Omega_1^0} \\ &= R.\vec{x}_{1*} \wedge \dot{\gamma}.\vec{z}_{1*,2} - R.\vec{z}_1 \wedge \dot{\alpha}.\vec{x}_{0,1,3} \\ &= -R.(\dot{\alpha}+\dot{\gamma}).\vec{y}_{1,1*}\end{aligned} \qquad \text{soit} \qquad \dot{\gamma} = -\dot{\alpha}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V_2^3(J)} &= \overrightarrow{V_2^1(J)} + \overrightarrow{V_1^0(J)} - \overrightarrow{V_3^0(J)} = \overrightarrow{JC} \wedge \overrightarrow{\Omega_2^1} + \overrightarrow{JH} \wedge \overrightarrow{\Omega_1^0} - \overrightarrow{JH} \wedge \overrightarrow{\Omega_3^0} \\ &= -R.\vec{x}_{1*} \wedge \dot{\gamma}.\vec{z}_{1*,2} + R.(2.\sin\beta - 1).\vec{z}_1 \wedge (\dot{\alpha} - \dot{\delta}).\vec{x}_{0,1,3} \\ &= (R.\dot{\gamma} + R.(2.\sin\beta - 1).(\dot{\alpha} - \dot{\delta})).\vec{y}_{1,1*}\end{aligned} \qquad \text{soit} \qquad \dot{\gamma} = (2.\sin\beta - 1).(\dot{\delta} - \dot{\alpha})$$

Finalement nous pouvons écrire : $\boxed{\dot{\gamma} = -\dot{\alpha}}$ et $\boxed{\dot{\delta} = \dfrac{2.(\sin\beta - 1)}{(2.\sin\beta - 1)}.\dot{\alpha}}$

Ce qui permet de déduire la mobilité du système (3 paramètres & 2 équations) : $\boxed{m = 3 - 2 = 1}$

IV -Roulement et pivotement en I.

La normale au contact S_2 / S_0 en I est le vecteur $\vec{x}_{0,1,3}$. Nous pouvons donc définir :

le vecteur pivotement en I par : $\overrightarrow{P_2^0(I)} = (\overrightarrow{\Omega_2^0}.\vec{x}_{0,1,3}).\vec{x}_{0,1,3} = ((\dot{\gamma}.\vec{z}_{1*,2} + \dot{\alpha}.\vec{x}_{0,1,3}).\vec{x}_{0,1,3}).\vec{x}_{0,1,3}$

le vecteur roulement en I par : $\overrightarrow{R_2^0(I)} = \overrightarrow{\Omega_2^0} - \overrightarrow{P_2^0(I)}$

Soit: $\boxed{\overrightarrow{P_2^0(I)} = (\dot{\alpha} + \dot{\gamma}\sin\beta).\vec{x}_{0,1,3} = \dot{\alpha}.(1-\sin\beta).\vec{x}_{0,1,3}}$ et $\boxed{\overrightarrow{R_2^0(I)} = \dot{\gamma}.\cos\beta.\vec{z}_1 = -\dot{\alpha}.\cos\beta.\vec{z}_1}$

V - VI - Axe de viration et surfaces axoïdes du mouvement 2/0 et 2/3.

$\boxed{\Delta_{20} = (O, I)}$

$I \in \Delta_{20}$ car $\overrightarrow{V_2^0(I)} = \vec{0}$ et $O \in \Delta_{20}$ car $\overrightarrow{V_2^0(O)} = \vec{0}$ (intersection des axes des liaisons 2/0 et 1/0).

Σ_2 : Cône d'axe $(O, \vec{z}_{1*})$, de sommet O et de génératrice (O, I), la roulante.

Σ_0 : Cône d'axe $(O, \vec{x}_{0,1,3})$, de sommet O et de génératrice (O, I), la base.

$\boxed{\Delta_{23} = (O, J)}$

$J \in \Delta_{23}$ car $\overrightarrow{V_2^3(J)} = \vec{0}$ et $O \in \Delta_{23}$ $\overrightarrow{V_2^3(O)} = \vec{0}$ (intersection des axes des liaisons 2/0, 1/0 et 3/0).

Σ_2 : Cône d'axe $(O, \vec{z}_{1*})$, de sommet O et de génératrice (O, J), la roulante.

Σ_3 : Cône d'axe $(O, \vec{x}_{0,1,3})$, de sommet O et de génératrice (O, J), la base.

VII - Accélérations .

VII.1 - Calcul de $\overrightarrow{J^0(I)}$ *:*

Le mouvement 1/0 est une rotation, $\vec{z}_1$ est dirigé vers « l'extérieur », I est fixe dans R_1 et $\overrightarrow{V_1^0(I)} = -R.\dot{\alpha}.\vec{y}_1$ donc :

$$\boxed{\overrightarrow{J^0(I)} = \overrightarrow{J_1^0(I)} = -R.\ddot{\alpha}.\vec{y}_1 - R.\dot{\alpha}^2.\vec{z}_1}$$

Ce résultat peut être vérifié en écrivant :

$$\overrightarrow{J_1^0(I)} = \overrightarrow{J_1^0(P)} + \frac{d^0\,\vec{\Omega}_1^0}{dt} \wedge \vec{PI} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge (\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{PI}) = \vec{0} + \ddot{\alpha}.\vec{x}_{0,1} \wedge R.\vec{z}_1 + \dot{\alpha}.\vec{x}_{0,1} \wedge (\dot{\alpha}.\vec{x}_{0,1} \wedge R.\vec{z}_1) = -R.\ddot{\alpha}.\vec{y}_1 - R.\dot{\alpha}^2.\vec{z}_1$$

VII.1 - Calcul de $\overrightarrow{J_2^0(I)}$ *:*

Par composition de mouvement il vient :

$$\overrightarrow{J_2^0(I)} = \overrightarrow{J_2^1(I)} + \overrightarrow{J_1^0(I)} + 2.\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{V_2^1(I)}$$

Le mouvement 2/1 est une rotation, $\vec{x}_{1*}$ est dirigé vers « l'intérieur », et $\overrightarrow{V_2^1(I)} = -R.\dot{\gamma}.\vec{y}_{1,1*}$ donc :

$$\overrightarrow{J_2^1(I)} = -R.\ddot{\gamma}.\vec{y}_{1,1*} + R.\dot{\gamma}^2.\vec{x}_{1*}$$

Ce résultat peut être vérifié en écrivant :

$$\overrightarrow{J_2^1(I)} = \overrightarrow{J_2^1(C)} + \frac{d^1\,\vec{\Omega}_2^1}{dt} \wedge \vec{CI} + \vec{\Omega}_2^1 \wedge (\vec{\Omega}_2^1 \wedge \vec{CI}) = \vec{0} + \ddot{\gamma}.\vec{z}_{1*} \wedge -R.\vec{x}_{1*} + \dot{\gamma}.\vec{z}_{1*} \wedge (\dot{\gamma}.\vec{z}_{1*} \wedge -R.\vec{x}_{1*}) = -R.\ddot{\gamma}.\vec{y}_{1,1*} + R.\dot{\gamma}^2.\vec{x}_{1*}$$

Le vecteur $\overrightarrow{J_1^0(I)}$ a été calculé ci-dessus et $2.\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{V_2^1(I)} = 2.\dot{\alpha}.\vec{x}_{0,1} \wedge -R.\dot{\gamma}.\vec{y}_{1,1*} = -2.R.\dot{\alpha}.\dot{\gamma}.\vec{z}_1$. Il vient donc :

$$\boxed{\overrightarrow{J_2^0(I)} = \begin{pmatrix} R.\dot{\gamma}^2.\cos\beta \\ -R.\ddot{\alpha} - R.\ddot{\gamma} \\ -R.\dot{\alpha}^2 - R.\dot{\gamma}^2 \sin\beta - 2.R.\dot{\alpha}.\dot{\gamma} \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} R.\dot{\alpha}^2.\cos\beta \\ 0 \\ R.\dot{\alpha}^2.(1-\sin\beta) \end{pmatrix}_1}$$