Mécanique générale

I Etude cinématique d'un réducteur à bille

Ce mécanisme dont le schéma cinématique est présenté en annexe (figure 1) permet de transmettre un mouvement de rotation entre deux arbres tout en imposant une réduction de la vitesse de rotation.

* L'arbre d'entrée S_1 est en liaison pivot d'axe $(O_1, \vec{z}_{0,1,2,a})$ et de paramètre $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ avec le bâti S_0.

* L'arbre de sortie S_2 est en liaison pivot d'axe $(O_2, \vec{z}_{0,1,2,a})$ et de paramètre $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_2)$ avec le bâti S_0.

* La bille S_3 (centre O_3, rayon r) est en contact avec S_0, S_1 et S_2 aux points A, B, C et D. Son paramètrage fait intervenir :

- le repère $R_a(O_1, \vec{x}_a, \vec{y}_a, \vec{z}_a)$ tel que $\vec{z}_a = \vec{z}_{0,1,2}$ et $\overrightarrow{O_1O_3} = (R + r).\vec{x}_a$. Le paramètre de mouvement associé est $\phi = (\vec{x}_0, \vec{x}_a)$
- l'écriture du vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_3^0}$ sous la forme : $\overrightarrow{\Omega_3^0} = \omega_1.\vec{x}_a + \omega_2.\vec{y}_a + \omega_3.\vec{z}_a$

Par ailleurs, le fonctionnement de ce mécanisme est associé à une condition de non glissement aux points A, B, C et D.

Questions

1.1 Par simple analyse des conditions de fonctionnement du mécanisme montrer, ***sans aucun calcul***, que le vecteur rotation 3/0 s'écrit nécessairement :

$$\overrightarrow{\Omega_3^0} = \omega.\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}_a$$

1.2 Ecrire les équations de liaison. En déduire la mobilité du mécanisme, le rapport de transmission et le vecteur rotation du mouvement 3/0.

1.3 Calculer la vitesse et l'accélération de O_3 relativement à R_0.

1.4 Donner l'axe central des mouvements 3/0, 3/1 et 3/2, on précisera également la nature des mouvements linéaires tangents.

1.5 Donner le roulement et le pivotement en D

II Etude Cinématique du planétaire de Havens

On se propose de réaliser un ***étude graphique*** sur le mécanisme transformateur de mouvement dont le schéma cinématique est donné en annexe. Ce mécanisme est constitué :

* d'un arbre d'entrée S_1 en liaison pivot d'axe $(O_1, \vec{x}_{0,1,2,3,4})$ avec le bâti S_0,

* d'une roue S_2 en liaison pivot d'axe $(O_2, \vec{x}_{0,1,2,3,4})$ avec l'arbre S_1,

* d'un pignon S_3 en liaison pivot d'axe $(O_3, \vec{x}_{0,1,2,3,4})$ avec le bâti S_0,

* d'un guide S_4 en liaison pivot d'axe $(O_4, \vec{x}_{0,1,2,3,4})$ avec le bâti S_0.

Par ailleurs :

* un doigt de S_2 d'axe $(B_2, \vec{x}_{0,1,2,3,4})$ est astreint à ce déplacer dans la rainure d'axe $(O_4, \vec{y}_4)$ du guide S_4,

* le contact en I entre le pignon S_3 et la roue S_2 est associé à une condition de roulement sans glissement.

Questions

2.1 Donner la nature du mouvement 4/2

2.2 la vitesse $\overrightarrow{V^0(A_1)}$ étant connue, construire sur la figure donnée en annexe, les vitesses suivantes :

$$\overrightarrow{V_4^0(A_1)},\ \overrightarrow{V_1^4(A_1)},\ \overrightarrow{V_2^4(B_2)},\ \overrightarrow{V_2^0(B_2)}\ \text{ et }\ \overrightarrow{V_3^0(I)}$$

Chaque tracé sera brièvement justifié dans la zone prévue à cet effet (au dessous de la figure).

III.Annexes

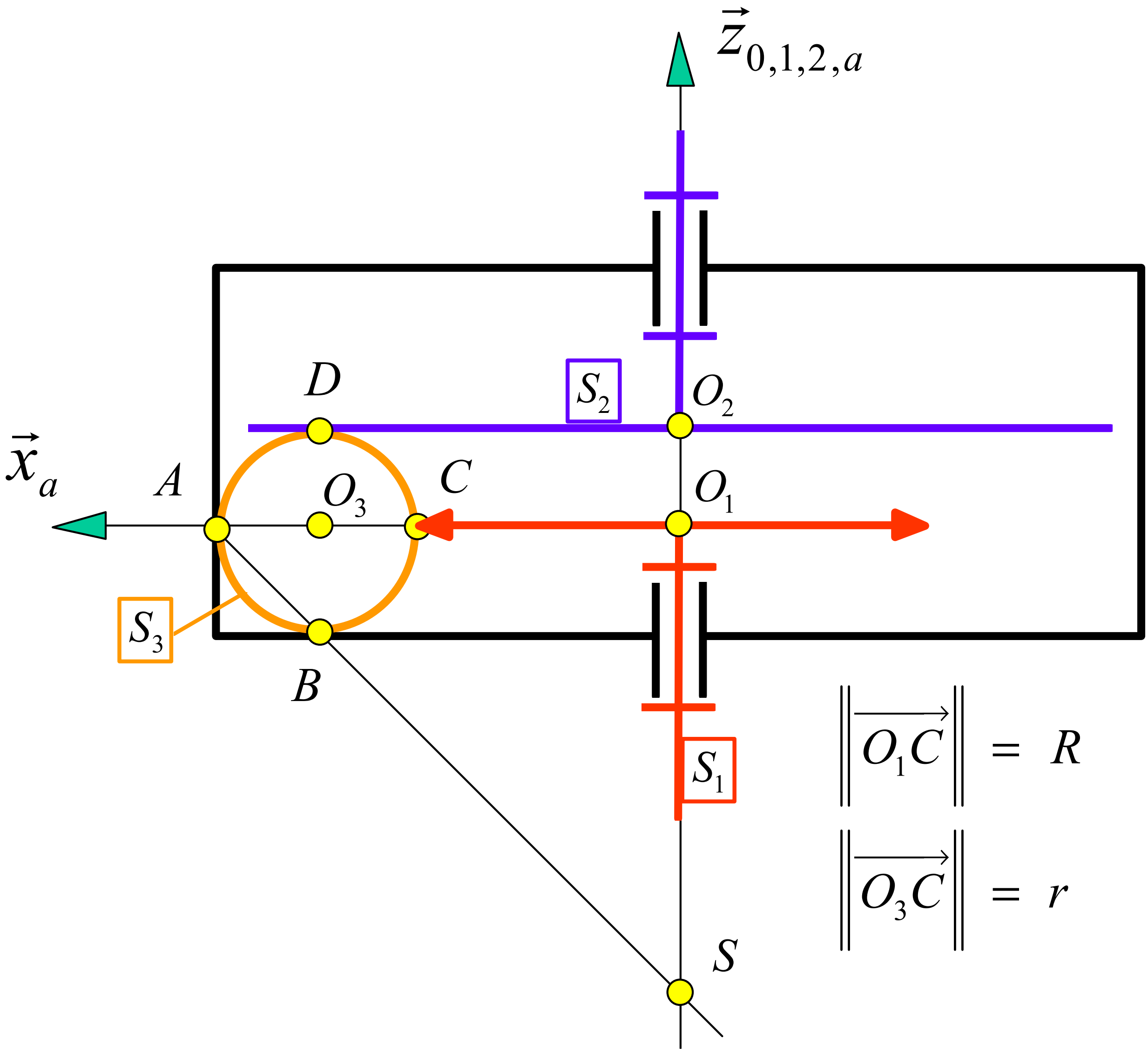
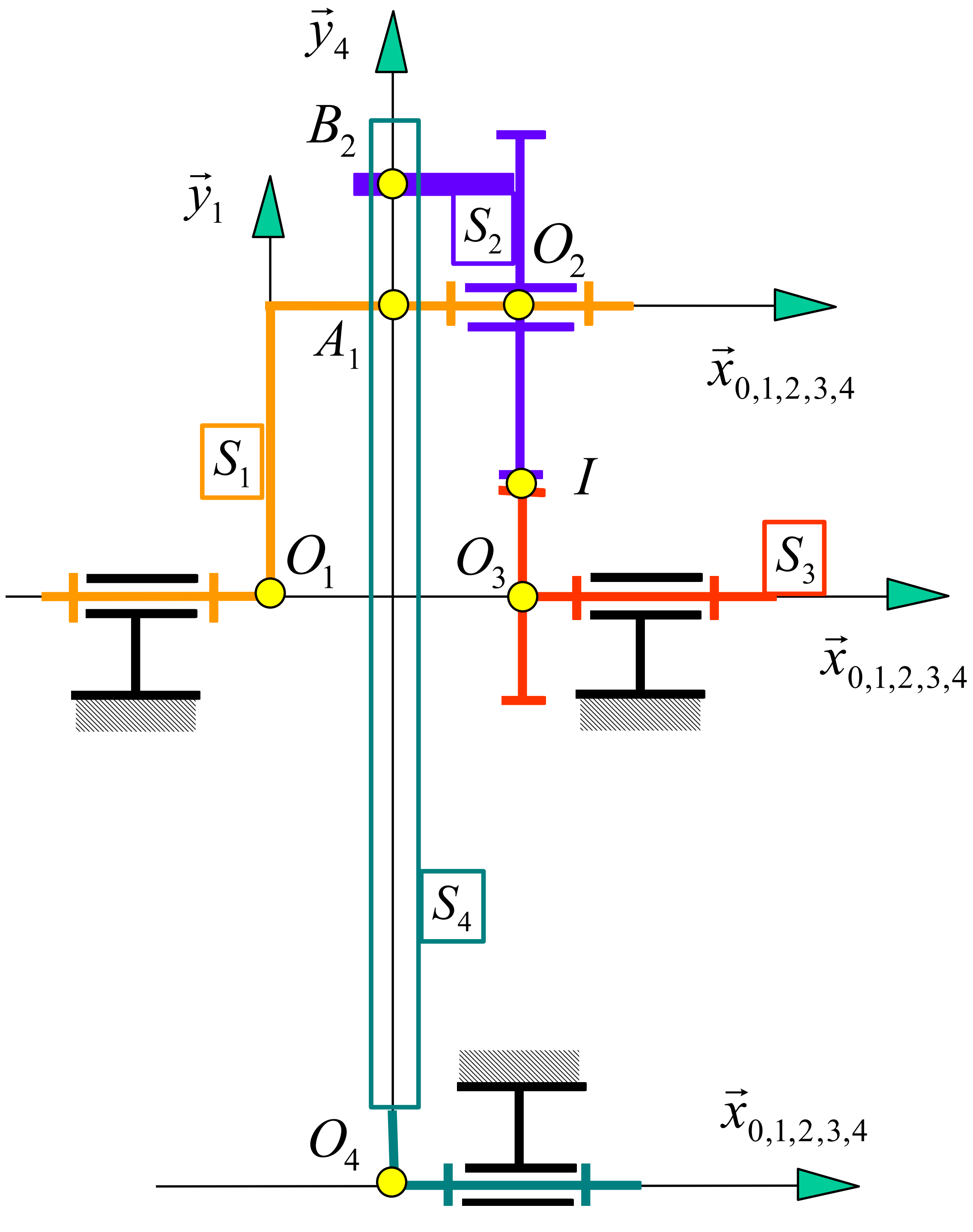


Figure 1



$\vec{y}_4$
B_2
$\vec{y}_1$
S_2
O_2
A_1
$\vec{x}_{0,1,2,3,4}$
S_1
I
O_1
O_3
S_3
$\vec{x}_{0,1,2,3,4}$
S_4
O_4
$\vec{x}_{0,1,2,3,4}$

Figure 2.a

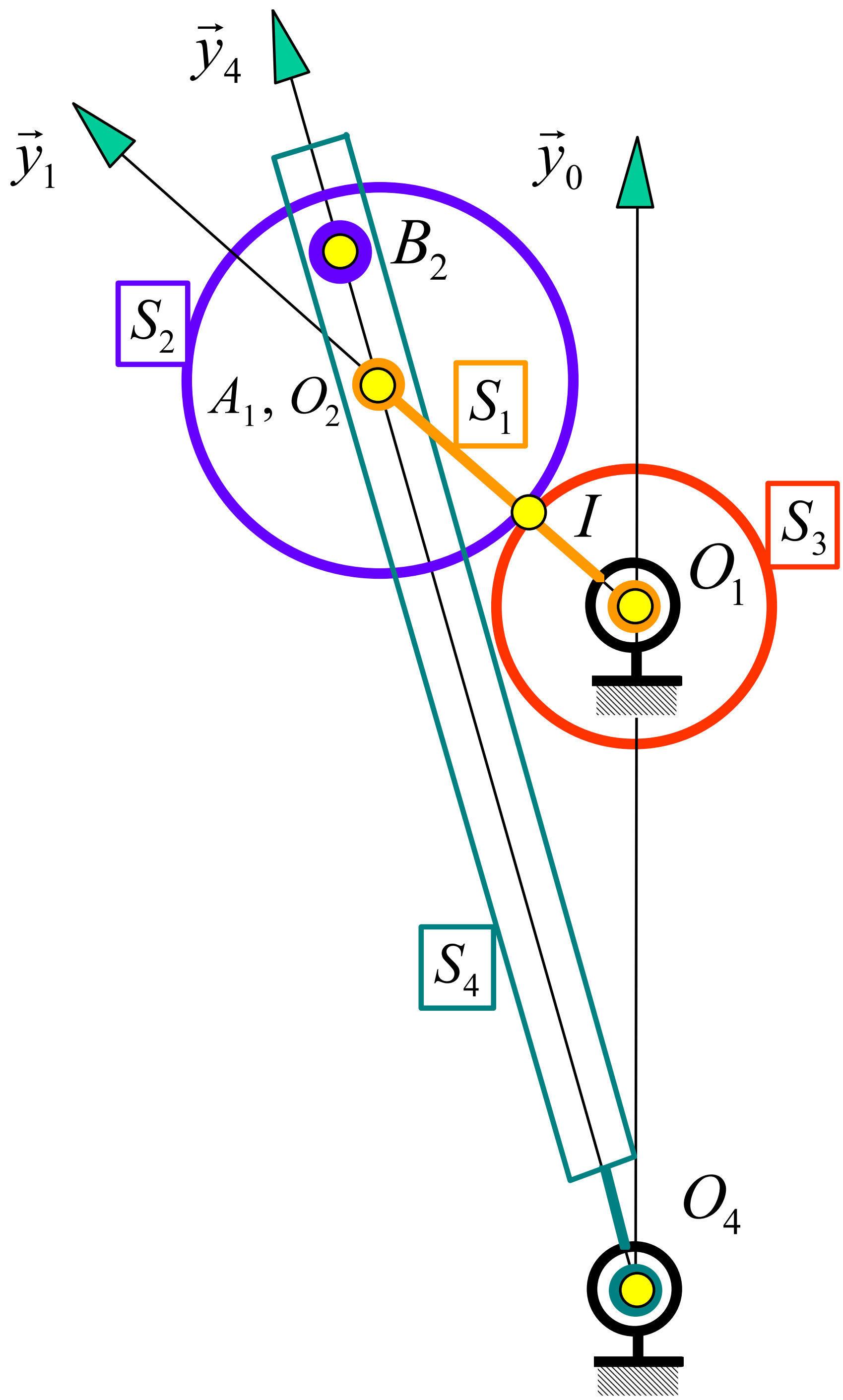
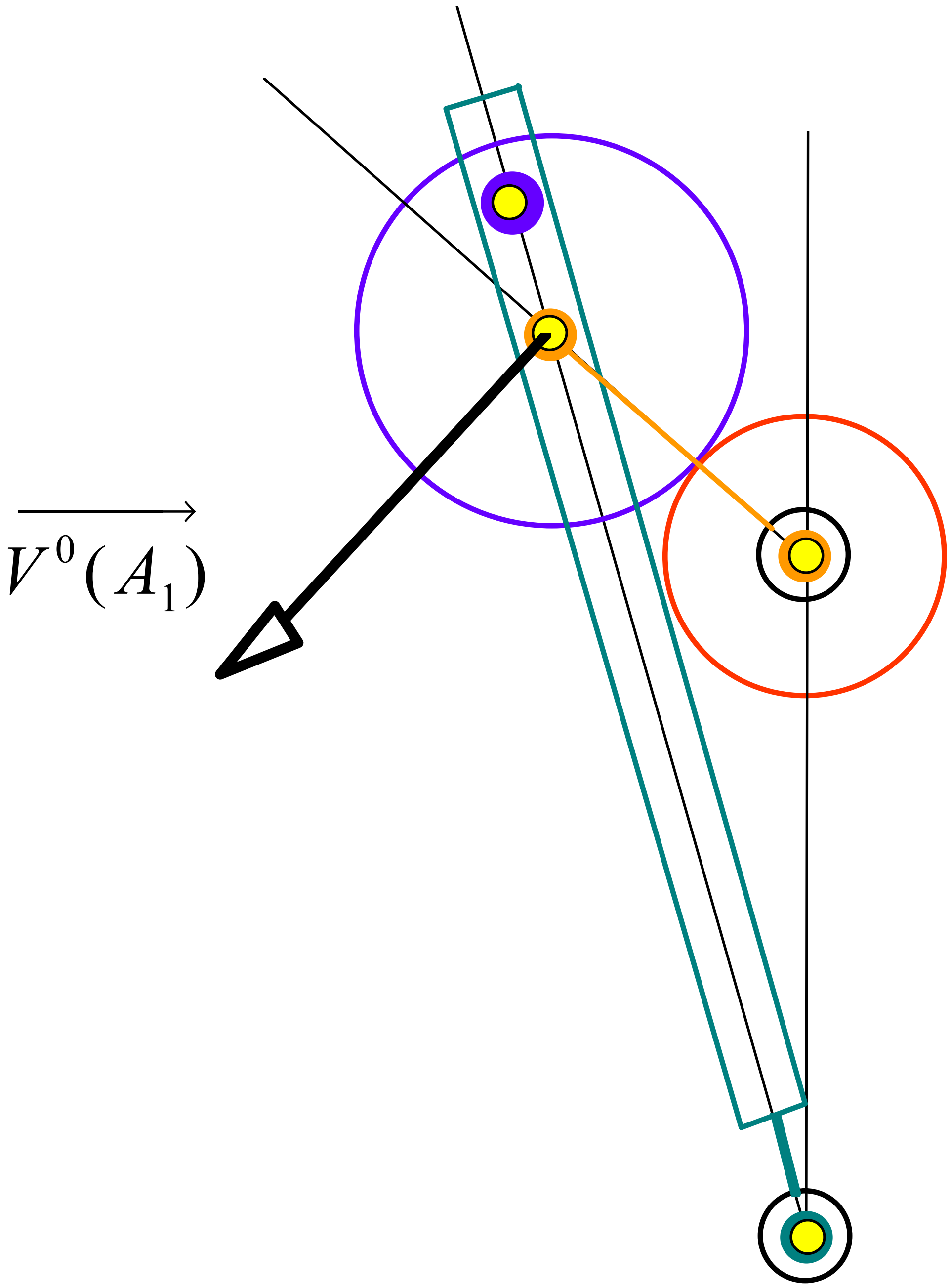


Figure 2.b

Nom :

Groupe :



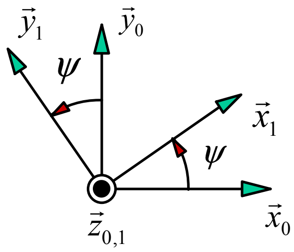
<u>Justification des tracés</u>

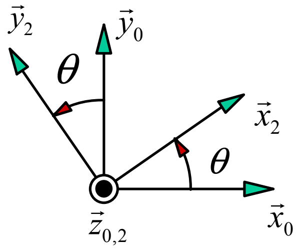
Mécanique générale

I Etude cinématique d'un réducteur à bille

1.0 Figures de changement de base et graphe de liaison :

c.f. constructions ci-contre:

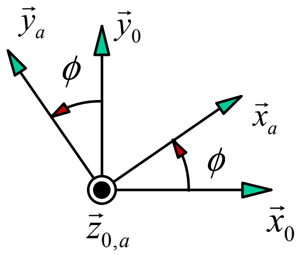


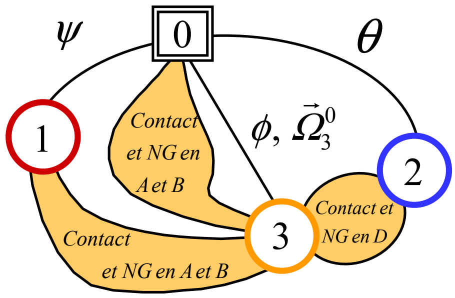


1.1 Vecteur rotation 3/0 :

La condition de non glissement en A et B entre S_0 et S_3 permet d'affirmer que l'axe central du mouvement 3/0 est la droite (A,B). $\vec{\Omega}_3^0$ est donc colinéaire à cette droite, nous pouvons donc écrire :

$$\boxed{\vec{\Omega}_3^0 = \omega.(\vec{x}_a + \vec{z}_a)}$$





1.2Equations de liaison :

Non glissement en A : $.\overrightarrow{V_3^0(A)} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{V_3^0(A)} = \overrightarrow{V_3^0(O_3)} + \overrightarrow{AO_3} \wedge \overrightarrow{\Omega_3^0} = \overrightarrow{V_a^0(O_3)} + \overrightarrow{AO_3} \wedge \overrightarrow{\Omega_3^0} = \overrightarrow{O_3O_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_a^0} - r.\vec{x}_a \wedge \omega.(\vec{x}_a + \vec{z}_a) = \left[(R+r).\dot{\phi}.+r.\omega\right]\vec{y}_a$$

Soit finalement :

$$\boxed{\dot{\phi} = -\frac{r.\omega}{(R+r)}}$$

Non glissement en B : $.\overrightarrow{V_3^0(B)} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{V_3^0(B)} = \overrightarrow{V_3^0(O_3)} + \overrightarrow{BO_3} \wedge \overrightarrow{\Omega_3^0} = (R+r).\dot{\phi}.\vec{y}_a + r.\vec{z}_a \wedge \omega.(\vec{x}_a + \vec{z}_a) = \left[(R+r).\dot{\phi} + r.\omega\right]\vec{y}_a$$

Soit la même relation que précédement:

$$\boxed{\dot{\phi} = -\frac{r.\omega}{(R+r)}}$$

Non glissement en C : $.\overrightarrow{V_3^1(C)} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{V_3^1(C)} = \overrightarrow{V_3^0(C)} - \overrightarrow{V_1^0(C)} = \overrightarrow{V_3^0(O_3)} + \overrightarrow{CO_3} \wedge \overrightarrow{\Omega_3^0} - \overrightarrow{CO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_1^0} = (R+r).\dot{\phi}.\vec{y}_a + r.\vec{x}_a \wedge \omega.(\vec{x}_a + \vec{z}_a) + R.\vec{x}_a \wedge \dot{\psi}.\vec{z}_{0,1,a}$$
$$= \left[(R+r).\dot{\phi} - r.\omega - R.\dot{\psi}\right]\vec{y}_a$$

Soit, en intégrant la relation ci-dessus :

$$\boxed{\dot{\psi} = -\frac{2.r.\omega}{R}}$$

Non glissement en D : . $\overrightarrow{V_3^2(D)} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{V_3^2(D)} = \overrightarrow{V_3^0(D)} - \overrightarrow{V_2^0(D)} = \overrightarrow{V_3^0(O_3)} + \overrightarrow{DO_3} \wedge \overrightarrow{\Omega_3^0} - \overrightarrow{DO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_2^0} = (R+r).\dot{\phi}.\vec{y}_a - r.\vec{z}_a \wedge \omega.(\vec{x}_a + \vec{z}_a) + (R+r).\vec{x}_a \wedge \dot{\theta}.\vec{z}_{0,1,a}$$
$$= \left[(R+r).\dot{\phi} - r.\omega - (R+r).\dot{\theta}\right]\vec{y}_a$$

Soit, en intégrant la première relation : $\boxed{\dot{\theta} = -\dfrac{2.r.\omega}{(R+r)}}$

Finlement, en exprimant les paramètres de mouvement en fonction de la rotation d'entrée, nous pouvons exprimer :

* le rapport de transmission : $\boxed{\rho = \dfrac{\dot{\theta}}{\dot{\psi}} = \dfrac{R}{(R+r)}}$

* le vecteur rotation $\vec{\Omega}_3^0$: $\boxed{\overrightarrow{\Omega_3^0} = -\dfrac{R.\dot{\psi}}{2.r}.(\vec{x}_a + \vec{z}_a)}$

* le vecteur rotation $\overrightarrow{\Omega_a^0}$: $\boxed{\overrightarrow{\Omega_a^0} = \dot{\phi}.\vec{z}_{0,a} = \dfrac{R.\dot{\psi}}{2.(R+r)}.\vec{z}_{0,a}}$

La mobilité du mécanisme est donc : $\boxed{m = 4 - 3 = 1}$

Les paramètres de mouvement sont au nombre de quatre $(\psi, \theta, \phi, \omega)$ si l'on a vu que le vecteur rotation 3/0 est colinéaire à (A,B). Dans ce contexte deux conditions de non glissement fournissent la même condition.

1.3 Vitesse et accélération de O_3 dans R_0 :

Le mouvement de O_3 dans R_0 est un mouvement circulaire de centre O et de rayon R, il vient immédiatement:

$$\boxed{\overrightarrow{V^0(O_3)} = \overrightarrow{V_a^0(O_3)} = \overrightarrow{O_3O_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_a^0} = (R+r).\dot{\phi}.\vec{y}_a}$$

$$\boxed{\overrightarrow{J^0(O_3)} = \overrightarrow{J_a^0(O_3)} = (R+r).\dot{\phi}.\vec{y}_a - (R+r).\dot{\phi}^2.\vec{x}_a}$$

1.4 axe central des mouvements 3/0, 3/1 et 3/2:

$\boxed{\Delta_{30} = (A,B)}$ car $\overrightarrow{V_3^0(A)} = \overrightarrow{V_3^0(B)} = \vec{0}$

$\boxed{\Delta_{31} = (C,S)}$ car $\overrightarrow{V_3^1(C)} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{V_3^1(S)} = \overrightarrow{V_3^0(S)} - \overrightarrow{V_1^0(S)} = \vec{0}$

$S \in \Delta_{30}$ et $S \in (O_1, \vec{z}_{0,1})$ axe de la liaison pivot 1/0

$\boxed{\Delta_{32} = (D,S)}$ car $\overrightarrow{V_3^2(D)} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{V_3^2(S)} = \overrightarrow{V_3^0(S)} - \overrightarrow{V_2^0(S)} = \vec{0}$

$S \in \Delta_{30}$ et $S \in (O_2, \vec{z}_{0,2})$ axe de la liaison pivot 2/0

Ces trois mouvements sont tangents à des rotations.

1.5 Roulement et pivotement en D:

Le roulement et le pivotement en D sont donnés par:

$\overrightarrow{P_3^2(D)} = (\overrightarrow{\Omega_3^2}.\vec{z}_{0,a}).\vec{z}_{0,a}$ et $\overrightarrow{R_3^2(D)} = \overrightarrow{P_3^2(D)} - \overrightarrow{\Omega_3^2}$ avec $\overrightarrow{\Omega_3^2} = \overrightarrow{\Omega_3^0} - \overrightarrow{\Omega_2^0} = \omega.(\vec{x}_a + \vec{z}_{0,a}) - \dot{\theta}.\vec{z}_{0,a}$

Il vient immédiatement: $\boxed{\overrightarrow{P_3^2(D)} = (\omega - \dot{\theta}).\vec{z}_{0,a}}$ et $\boxed{\overrightarrow{R_3^2(D)} = \omega.\vec{x}_a}$

II Etude cinématique du planétaire de Havens

2.1 Nature du mouvement 4/2:

les points A_1 et B_2 sont fixes relativement à S_2 et il sont astreint à ce déplacer selon la droite $(O_4, \vec{y}_4)$. La liaison ainsi réalisée est un glissière. Le mouvement 4/2 est donc une ***translation rectiligne.***

2.2 Construction graphique:

A_1 étant fixe relativement aux solides S_1 et S_2, nous pouvons écrire:

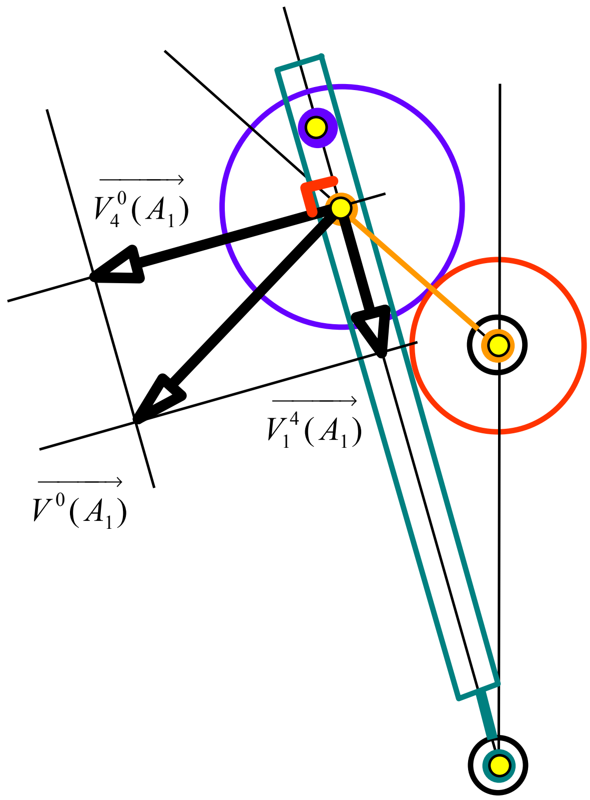
$$\overrightarrow{V^0(A_1)} = \overrightarrow{V_1^0(A_1)} = \overrightarrow{V_2^0(A_1)}$$

De plus nous pouvons écrire:

$$\overrightarrow{V_1^0(A_1)} = \overrightarrow{V_1^4(A_1)} + \overrightarrow{V_4^0(A_1)}$$

avec $\overrightarrow{V_1^4(A_1)} = \overrightarrow{V_2^4(A_1)}$ portée par $(O_4, \vec{y}_4)$ car 4/2 est une translation et $\overrightarrow{V_4^0(A_1)} \perp (O_4, \vec{y}_4)$ car 4/0 est une rotation d'axe $(O_4, \vec{x}_{0,1,2,3,4})$.

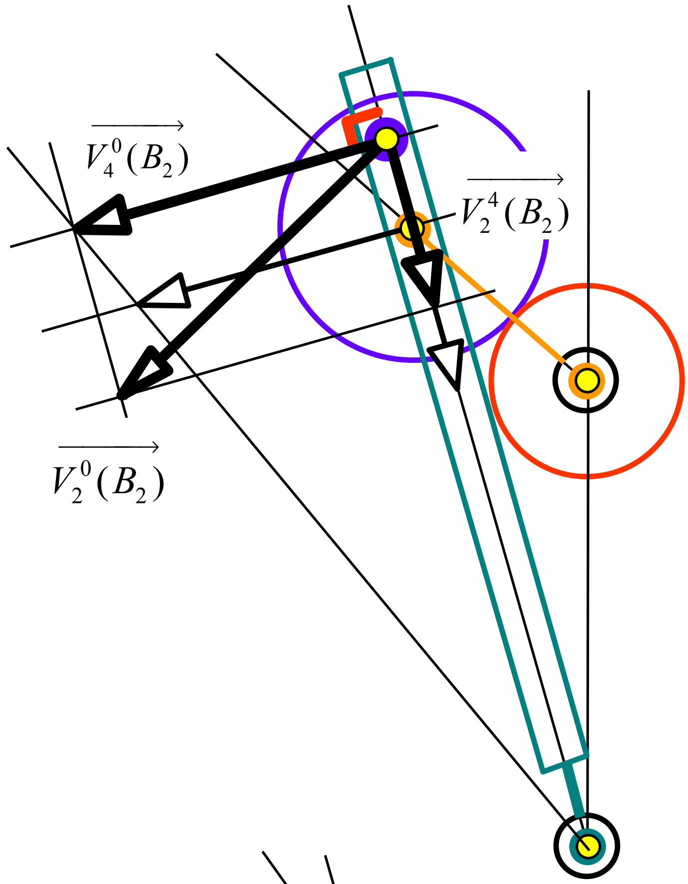
Ce qui permet de construire les vitesses $\overrightarrow{V_1^4(A_1)}$ et $\overrightarrow{V_4^0(A_1)}$ comme indiqué sur la figure ci-contre.



Par ailleurs nous avons:

$$\overrightarrow{V_2^0(B_2)} = \overrightarrow{V_2^4(B_2)} + \overrightarrow{V_4^0(B_2)}$$

avec $\overrightarrow{V_2^4(B_2)} = \overrightarrow{V_2^4(A_1)} = \overrightarrow{V_1^4(A_1)}$ car Le mouvement 4/2 étant une translation et le point A_1 est fixe relativement aux solides S_1 et S_2 et $\overrightarrow{V_4^0(B_2)}$ construite à partir de $\overrightarrow{V_4^0(A_1)}$ car car 4/0 est une rotation de centre O_4.
Ce qui permet de construire les vitesses $\overrightarrow{V_2^4(B_2)}$, $\overrightarrow{V_4^0(B_2)}$ et $\overrightarrow{V_2^0(B_2)}$ comme indiqué sur la figure ci-contre:



Pour finir nous avons:

$$\overrightarrow{V_3^0(I)} = \overrightarrow{V_3^2(I)} + \overrightarrow{V_2^0(I)}$$

avec $\overrightarrow{V_3^2(I)} = \vec{0}$ car il y à roulement sans glissement en I et $\overrightarrow{V_3^0(I)} \perp (O_3, I)$ car 3/0 est une rotation d'axe $(O_3, \vec{x}_{0,1,2,3,4})$.
$\overrightarrow{V_3^0(I)} = \overrightarrow{V_2^0(I)}$ peut donc être construite par équi-projectivité à partir de $\overrightarrow{V_2^0(B_2)}$ comme indiqué sur la figure ci-contre: