

Mécanique générale

Moteur à cylindrée variable

L'embellage de moteur présenté ci-contre est constitué d'un attelage mobile particulier. Par rapport à un système bielle manivelle classique, cet attelage comporte une pièce supplémentaire appelée pignon basculeur (repère 3 sur le dessin ci-contre). Ce pignon a un double rôle :

- * Il transmet le mouvement de la bielle vers le piston.
- * Il permet également de définir la position des points morts (haut et bas) et donc la cylindrée du moteur. Ces modifications de cylindrée sont pilotées par une crémaillère de commande (repère 5) dont la position est asservie à un dispositif de contrôle (repère 6).

Nous allons étudier le fonctionnement cinématique de ce dispositif. La crémaillère de commande et le dispositif de contrôle sont des éléments de réglage qui seront considérés comme appartenant au bâti.

Le schéma cinématique est présenté en Annexe (figure 1) il comprend :

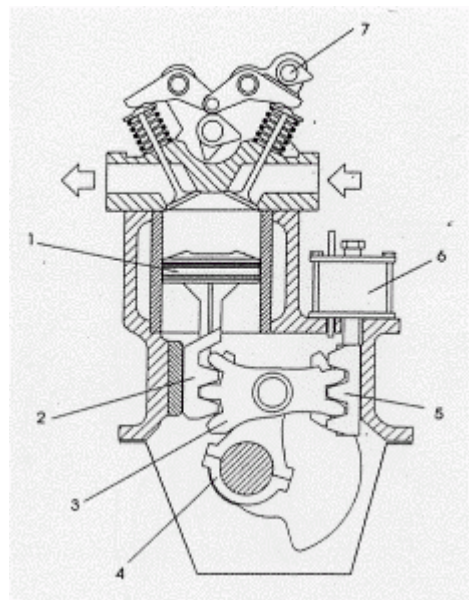
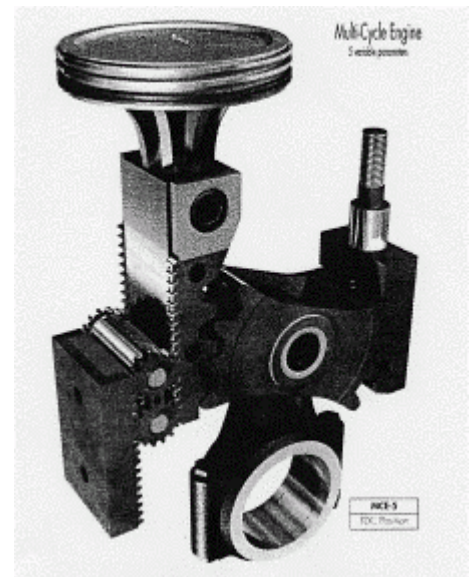
- * Le vilebrequin S_1 en liaison pivot d'axe et de paramètre avec le bâti S_0 .
- * La bielle en liaison pivot d'axe et de paramètre avec le vilebrequin S_1 .
- * Le pignon basculeur S_3 en liaison pivot d'axe et de paramètre avec la bielle S_2 .
- * Le piston S_4 en liaison glissière d'axe et de paramètre avec le bâti S_0 .

Par ailleurs, le pignon basculeur S_3 est en contact en I avec le piston S_4 et en J avec le bâti S_0 . Ces contacts sont associés à une condition de roulement sans glissement.

Questions

1 Tracer les figures de changement de base (on prendra soin de tracer également la figure de changement de base entre S_0 et S_2) et le graphe de liaison.

2 Exprimer les fermetures de chaîne associées aux contacts en I et J . En déduire les vecteurs et ainsi que les 2 équations reliant les paramètres géométriques aux paramètres de mouvement.



3 En combinant ces deux dernières équations montrer qu'elles conduisent à une équation de montage et à une équation de liaison. Dériver l'équation de liaison obtenue (ce résultat sera utilisé dans la question suivante pour simplifier les expressions des vitesses de glissement en I et J).

4 Traduire le non glissement en I et J .

5 Calculer la mobilité du système.

6 Préciser la nature des trajectoires des points géométriques I et J dans le repère R_0 et calculer leur vitesse et leur accélération relativement à ce repère :

$$\overrightarrow{V^0(I)}, \overrightarrow{V^0(J)}, \overrightarrow{J^0(I)}, \overrightarrow{J^0(J)}$$

7 Connaissant la vitesse du point O_2 dans R_0 ($\overrightarrow{V^0(O_2)}$), construire graphiquement sur le document donné en annexe les vitesses :

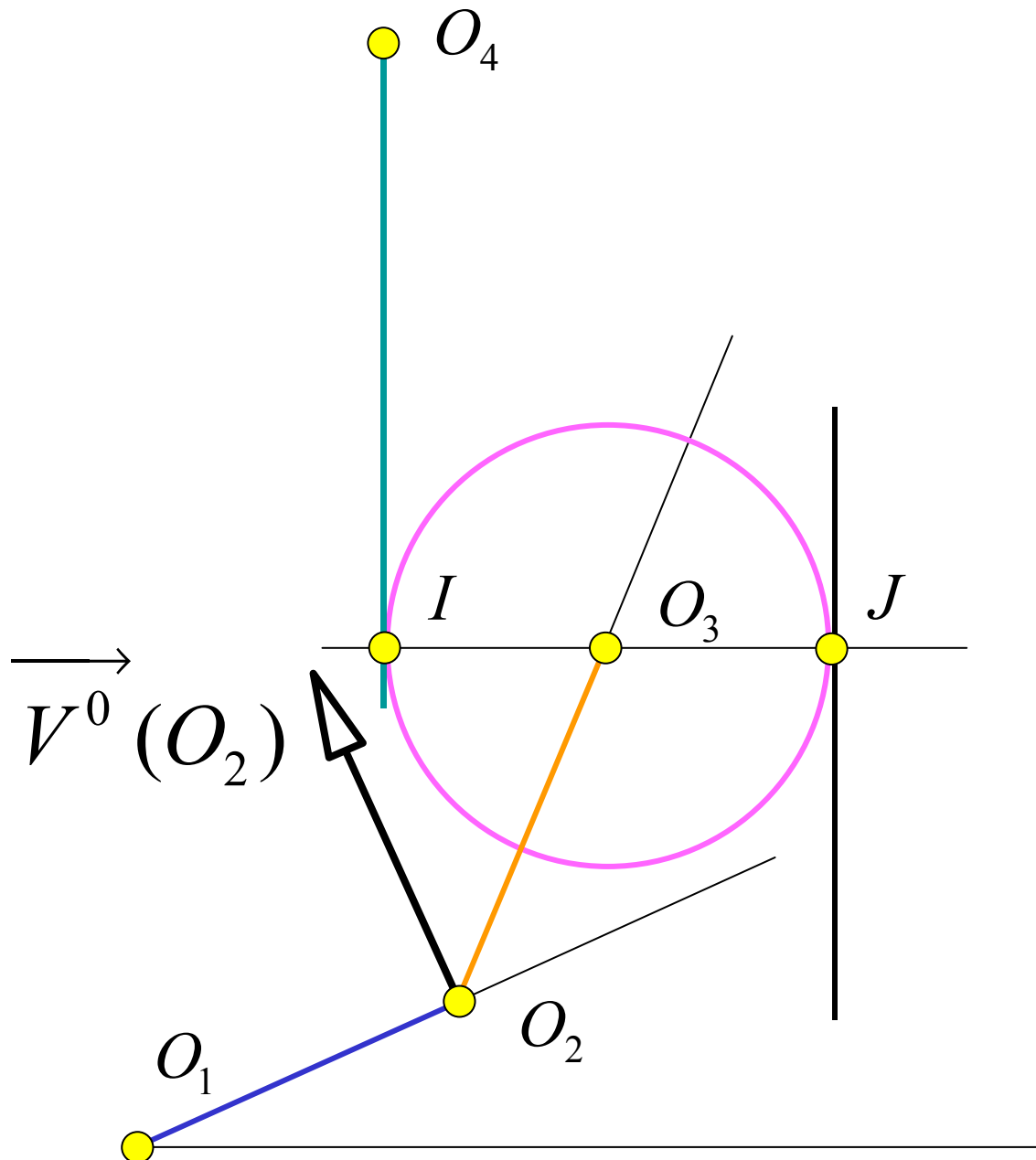
$$\overrightarrow{V_1^0(O_3)}, \overrightarrow{V_3^0(O_3)}, \overrightarrow{V_2^1(O_3)}, \overrightarrow{V_3^0(I)} \text{ et } \overrightarrow{V_4^0(I)}$$

et les Centre Instantané de Rotation des mouvement 4/3, 3/0 et 2/0.

Chaque construction sera justifiée par une explication **succincte** dans la zone réservée à cet effet sur la feuille de tracé.

Nom :

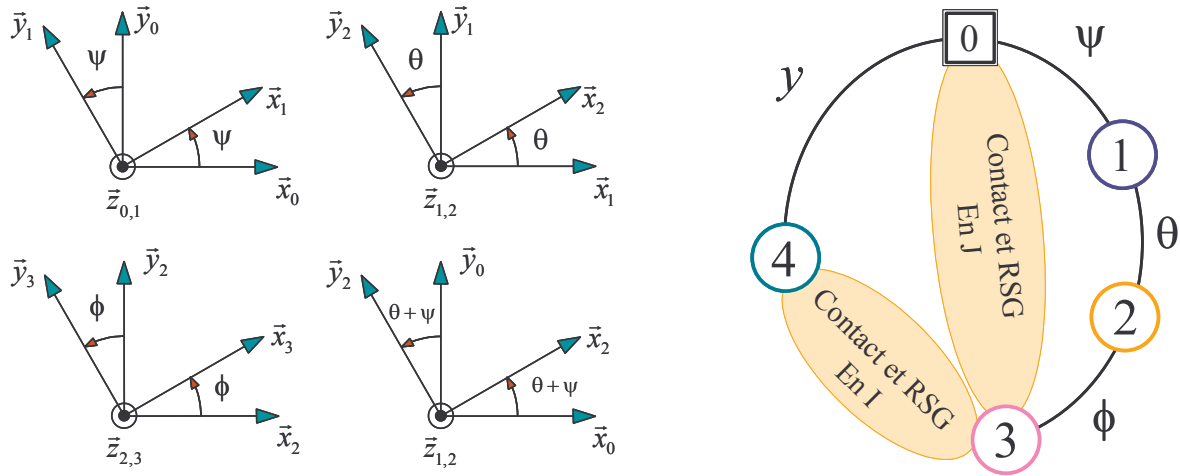
Groupe :



Justification des tracés

Eléments de correction

1 Figures de changement de base et graphe des liaisons



2 Fermetures de chaînes en I et J

* Le contact en I impose : $\vec{IO}_3 + \vec{O}_3\vec{O}_2 + \vec{O}_2\vec{O}_1 + \vec{O}_1\vec{A} + \vec{AI} = \vec{0}$

Soit : $R\vec{x}_0 - l\vec{x}_2 - r\vec{x}_1 + a\vec{x}_0 + \left\| \vec{AI} \right\| \cdot \vec{y}_0 = R\vec{x}_0 - l \begin{pmatrix} \cos(\theta + \psi) \\ \sin(\theta + \psi) \end{pmatrix}_0 - r \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}_0 + a\vec{x}_0 + \left\| \vec{AI} \right\| \cdot \vec{y}_0 = \vec{0}$

$$R + a = r \cdot \cos \psi + l \cdot \cos(\theta + \psi) \quad (1)$$

et

$$\vec{AI} = (r \cdot \sin \psi + l \cdot \sin(\theta + \psi)) \cdot \vec{y}_0 \quad (2)$$

* Le contact en J impose : $\vec{JO}_3 + \vec{O}_3\vec{O}_2 + \vec{O}_2\vec{O}_1 + \vec{O}_1\vec{B} + \vec{BJ} = \vec{0}$

Soit : $-R\vec{x}_0 - l\vec{x}_2 - r\vec{x}_1 + b\vec{x}_0 + \left\| \vec{BJ} \right\| \cdot \vec{y}_0 = -R\vec{x}_0 - l \begin{pmatrix} \cos(\theta + \psi) \\ \sin(\theta + \psi) \end{pmatrix}_0 - r \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}_0 + b\vec{x}_0 + \left\| \vec{BJ} \right\| \cdot \vec{y}_0 = \vec{0}$

$$b - R = r \cdot \cos \psi + l \cdot \cos(\theta + \psi) \quad (3)$$

et

$$\vec{BJ} = (r \cdot \sin \psi + l \cdot \sin(\theta + \psi)) \cdot \vec{y}_{0,4} = \vec{AI} \quad (4)$$

3 Equation de liaison et équation de montage

L'addition et la soustraction des deux équations (1) et (3) conduit à :

Addition :
$$r \cdot \cos \psi + l \cdot \cos(\theta + \psi) = \frac{a + b}{2} \quad (E_{L1})$$

Cette équation est une équation de liaison car elle fait apparaître des paramètres de mouvement.

Soustraction :
$$b - a = 2R \quad (E_{M1})$$

Cette équation est une équation de montage car elle ne fait pas apparaître de paramètre de mouvement.

En dérivant l'équation de liaison il vient :

$$r.\dot{\psi}.\sin \psi + l.(\dot{\theta} + \dot{\psi}).\sin(\theta + \psi) = 0$$

4 Non glissement en I et J

Non glissement en I : $\vec{V}_3^4(I) = \vec{0}$, cette vitesse peut être calculé de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\vec{V}_3^4(I) &= \vec{V}_3^2(I) + \vec{V}_2^1(I) + \vec{V}_1^0(I) - \vec{V}_4^0(I) \\ &= \vec{IO}_3 \wedge \vec{\Omega}_3^2 + \vec{IO}_2 \wedge \vec{\Omega}_2^1 + \vec{IO}_1 \wedge \vec{\Omega}_1^0 - \dot{y}.\vec{y}_{0,4} \\ &= R.\vec{x}_0 \wedge \dot{\phi}.\vec{z}_{0,1,2,3} + (R.\vec{x}_0 - l.\vec{x}_2) \wedge \dot{\theta}.\vec{z}_{0,1,2,3} + (R.\vec{x}_0 - l.\vec{x}_2 - r.\vec{x}_1) \wedge \dot{\psi}.\vec{z}_{0,1,2,3} - \dot{y}.\vec{y}_{0,4} \\ &= -R.(\dot{\phi} + \dot{\theta} + \dot{\psi}).\vec{y}_0 + l.(\dot{\theta} + \dot{\psi}).\vec{y}_2 + r.\dot{\psi}.\vec{y}_1 - \dot{y}.\vec{y}_{0,4} \\ &= \begin{pmatrix} -l.(\dot{\theta} + \dot{\psi}).\sin(\theta + \psi) - r.\dot{\psi}.\sin \psi \\ -R.(\dot{\phi} + \dot{\theta} + \dot{\psi}) + l.(\dot{\theta} + \dot{\psi}).\cos(\theta + \psi) + r.\dot{\psi}.\cos \psi - \dot{y} \end{pmatrix}_0\end{aligned}$$

En tenant compte de l'équation de liaison (forme dérivée ci-dessus) il vient :

$$\vec{V}_3^4(I) = \begin{pmatrix} 0 \\ -R.(\dot{\phi} + \dot{\theta} + \dot{\psi}) + l.(\dot{\theta} + \dot{\psi}).\cos(\theta + \psi) + r.\dot{\psi}.\cos \psi - \dot{y} \end{pmatrix}_0$$

Nous pouvons remarquer que cette vitesse est bien portée par la direction $\vec{y}_0$ qui est la direction tangente au contact en I entre les solides S_3 et S_4 .

Finalement le non glissement en I impose :

$$-R.\dot{\phi} + (-R + l.\cos(\theta + \psi)).\dot{\theta} + (-R + l.\cos(\theta + \psi) + r.\cos \psi).\dot{\psi} - \dot{y} = 0$$

Soit en tenant compte de l'équation (1) :

$$\dot{y} = -R.\dot{\phi} + (a - r.\cos \psi).\dot{\theta} + a.\dot{\psi} \quad E_{L2}$$

Non glissement en J : $\vec{V}_3^0(J) = \vec{0}$, cette vitesse peut être calculé comme précédemment, il vient :

$$\vec{V}_3^0(J) = \vec{V}_3^2(J) + \vec{V}_2^1(J) + \vec{V}_1^0(J) = \begin{pmatrix} -l.(\dot{\theta} + \dot{\psi}).\sin(\theta + \psi) - r.\dot{\psi}.\sin \psi \\ R.(\dot{\phi} + \dot{\theta} + \dot{\psi}) + l.(\dot{\theta} + \dot{\psi}).\cos(\theta + \psi) + r.\dot{\psi}.\cos \psi \end{pmatrix}_0$$

De même, en tenant compte de l'équation de liaison sous sa forme dérivée, nous avons :

$$\vec{V}_3^0(J) = \begin{pmatrix} 0 \\ R.(\dot{\phi} + \dot{\theta} + \dot{\psi}) + l.(\dot{\theta} + \dot{\psi}).\cos(\theta + \psi) + r.\dot{\psi}.\cos \psi \end{pmatrix}_0$$

Vitesse qui est également portée par la direction $\vec{y}_0$. Finalement le non glissement en J impose :

$$R.\dot{\phi} + (R + l.\cos(\theta + \psi)).\dot{\theta} + (R + l.\cos(\theta + \psi) + r.\cos \psi).\dot{\psi} = 0$$

Soit en tenant compte de l'équation (3) :

$$R.\dot{\phi} + (b - r.\cos \psi).\dot{\theta} + b.\dot{\psi} = 0 \quad E_{L3}$$

5 mobilité

Le paramétrage de ce système est réalisé à l'aide de $p = 4$ paramètres (ψ, θ, ϕ, y) , les fermetures de chaînes et les conditions de non glissement en I et J nous ont fourni $r = 3$ équations de liaisons (E_{L1}, E_{L2}, E_{L3}) . La mobilité du système est donc :

$$m = p - r = 4 - 3 = 1$$

6 Mouvement de I et J dans R_0

La trajectoire de I dans R_0 est la droite $(A, \vec{y}_{0,4})$ et celle de J est la droite $(B, \vec{y}_{0,4})$. Ces deux points sont donc animés d'un mouvement rectiligne relativement au repère R_0 . Par ailleurs, la traduction des fermetures de chaînes réalisées par les contacts en I et J a permis d'écrire :

$$\vec{AI} = \vec{BJ} = (r \cdot \sin \psi + l \cdot \sin(\theta + \psi)) \cdot \vec{y}_{0,4} = \lambda \cdot \vec{y}_{0,4}$$

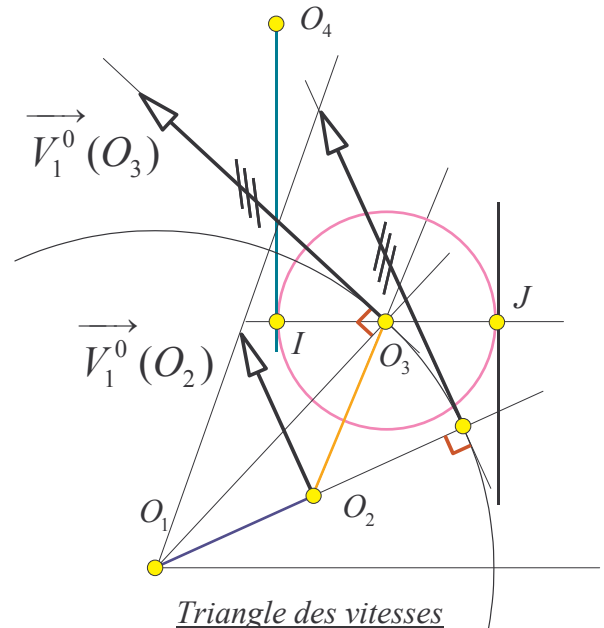
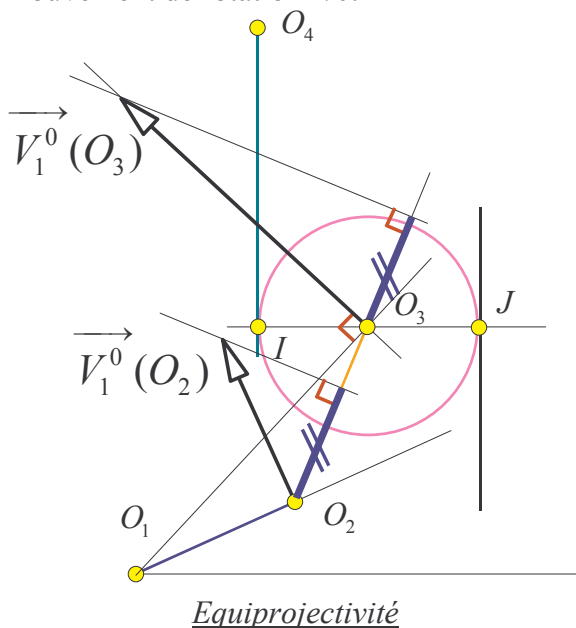
Ce résultat permet d'écrire directement :

$$\vec{V}^0(I) = \vec{V}^0(J) = \dot{\lambda} \cdot \vec{y}_{0,4} = (r \cdot \dot{\psi} \cdot \cos \psi + l \cdot (\dot{\theta} + \dot{\psi}) \cdot \cos(\theta + \psi)) \cdot \vec{y}_{0,4}$$

$$\vec{J}^0(I) = \vec{J}^0(J) = \ddot{\lambda} \cdot \vec{y}_{0,4} = (r \cdot (\ddot{\psi} \cdot \cos \psi - \dot{\psi}^2 \cdot \sin \psi) + l \cdot ((\ddot{\theta} + \ddot{\psi}) \cdot \cos(\theta + \psi) - (\dot{\theta} + \dot{\psi})^2 \cdot \sin(\theta + \psi))) \cdot \vec{y}_{0,4}$$

7 Constructions graphiques

* La vitesse $\vec{V}^0(O_2) = \vec{V}_1^0(O_2)$ est connue et le mouvement 1/0 est une rotation. Nous savons donc que la vitesse $\vec{V}_1^0(O_3)$ est portée par la direction orthogonale à la droite (O_1O_3) , son intensité peut être obtenue par équiprojectivité : $\vec{V}_1^0(O_3) \cdot \vec{O_2O_3} = \vec{V}_1^0(O_2) \cdot \vec{O_2O_3}$ ou à partir du triangle des vitesses du mouvement de rotation 1/0.



* Nous avons : $\vec{V}_3^0(O_3) = \vec{V}_3^1(O_3) + \vec{V}_1^0(O_3)$ soit : $\vec{V}_1^0(O_3) = \vec{V}_3^0(O_3) - \vec{V}_3^1(O_3)$

Or O_3 est fixe relativement au solide S_2 et S_3 , nous pouvons donc écrire :

$$\vec{V}_1^0(O_3) = \vec{V}_3^0(O_3) - \vec{V}_2^1(O_3)$$

* $\vec{V}_1^0(O_3)$ construite à l'étape précédente

* $\vec{V}_3^0(O_3)$ de direction connue car le mouvement 3/0 est tangent à une rotation de centre J

* $\vec{V}_2^1(O_3)$ de direction connue car le mouvement 2/1 est une rotation de centre O_2

Ce qui permet de construire les vitesses $\vec{V}_3^0(O_3)$ et $\vec{V}_2^1(O_3)$.

* La construction de $\vec{V}_3^0(I)$ à partir de $\vec{V}_3^0(O_3)$ est immédiate (rotation instantanée de centre J) et le non glissement en I permet d'écrire :

$$\vec{V}_4^3(I) = \vec{V}_4^0(I) - \vec{V}_3^0(I) = \vec{0} \quad \text{soit :} \quad \vec{V}_4^0(I) = \vec{V}_3^0(I)$$

* $I_{34} = I$ car $\vec{V}_4^3(I) = \vec{0}$ et $I_{30} = J$ car $\vec{V}_3^0(J) = \vec{0}$

* $\vec{V}_3^0(O_3) = \vec{V}_2^0(O_3)$ et $\vec{V}_1^0(O_2) = \vec{V}_2^0(O_2)$ et le mouvement 2/0 est tangent à une rotation, I_{20} se trouve donc à l'intersection des deux droites issues de O_2 et O_3 est orthogonales à $\vec{V}_2^0(O_2)$ et à $\vec{V}_2^0(O_3)$.

