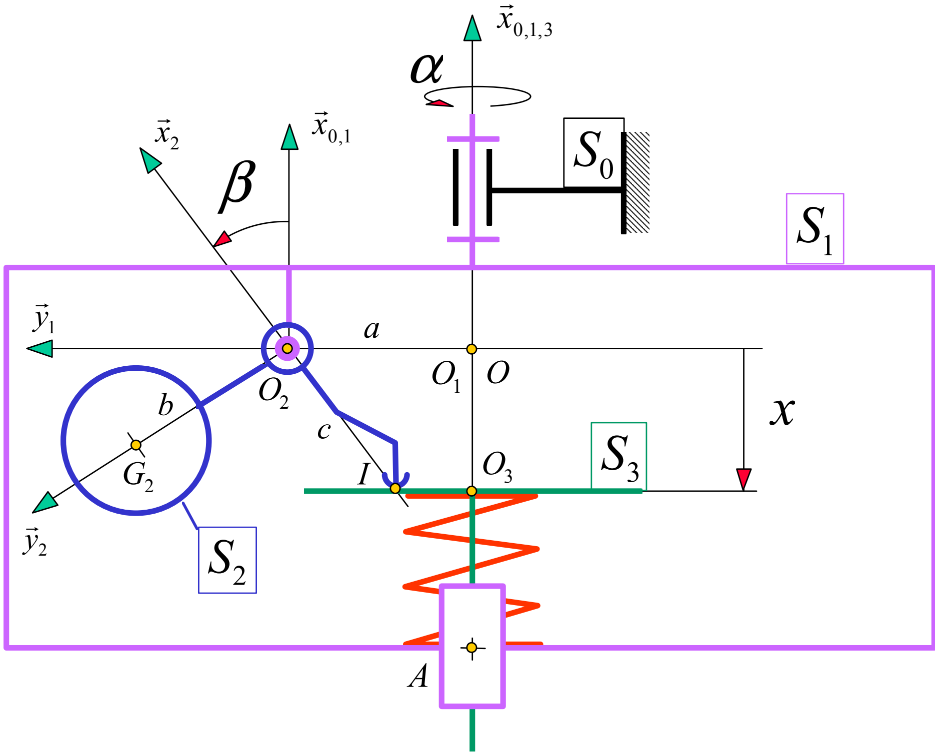
Mécanique générale

Dynamique – Etude d'un régulateur de vitesse de rotation (durée : 1h30)

Le principe de fonctionnement de ce mécanisme est simple : Le mouvement de rotation à réguler est communiqué à la pièce (S_1), ce mouvement induit un déplacement de la masselotte mobile (S_2) qui actionne un poussoir (S_3) lui-même relié à un contacteur qui commande l'alimentation du moteur.



$$\overrightarrow{O_2G_2} = b.\vec{y}_2 \qquad \overrightarrow{OO_2} = a.\vec{y}_1 \qquad \overrightarrow{O_2I} = -c.\vec{x}_2 \qquad \overrightarrow{O_1O_3} = x.\vec{x}_{0,1,3}$$

La liaison (S_1) / (S_0) est une liaison pivot d'axe $(O, \vec{x}_{0,1,3})$ et de paramètre : $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$.

La liaison (S_2) / (S_1) est une liaison pivot d'axe $(O_2, \vec{z}_{1,2})$ et de paramètre : $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.

La liaison (S_3) / (S_1) par une liaison glissière d'axe $(O, \vec{x}_{0,1,3})$ et de paramètre : $x = \overrightarrow{OO_3}.\vec{x}_{0,1,3}$.

✧ Les caractéristiques inertielles des pièces sont les suivantes :

* <u>*Pièce (S_1) :*</u> A_1 est le moment d'inertie de (S_1) / $(O_1, \vec{x}_1)$, cette pièce présente une symétrie de révolution autour de l'axe $(O_1, \vec{x}_1)$ et sa masse est notée m_1

* <u>*Pièce (S_3) :*</u> A_3 est le moment d'inertie de (S_3) / $(O_3, \vec{x}_3)$, cette pièce présente une symétrie de révolution autour de l'axe $(O_3, \vec{x}_3)$ et sa masse est notée m_3.

* <u>*Pièce (S_2) :*</u> seule la masselotte sphérique de centre (G_2) est pesante, sa masse est M et son moment d'inertie par rapport à un diamètre est A_2.

✧ L'équation de liaison traduisant le contact en I est : $x + b.\cos\beta = 0$

✧ Le repère R_0 est supposé galiléen

✧ Un moteur exerce sur la pièce (S_1) un couple d'intensité $C_m . \vec{x}_{0,1,3}$ tel que $\dot{\alpha} = \omega = Cste$

✧.Les liaisons 0/1, 1/2 et 1/3 sont supposées parfaites.

✧ Un ressort de raideur k est monté entre les pièces (S_1) et (S_3), son action s'annule avec x.

✧ Le contact en I entre les solides (S_2) et (S_3) est ponctuel avec frottement (coef. f) et glissement.

I – Géométrie des masses :

I.1 Donner **la forme** des matrices d'inertie suivantes : $\overline{\overline{I}}(O_1, S_1)$, $\overline{\overline{I}}(G_2, S_2)$, $\overline{\overline{I}}(O_3, S_3)$. On utilisera les notations classiques : $(A_i, B_i, C_i, ...)$.

I.2 Localiser, sans aucun calcul, le centre de masse des pièces (S_1) et (S_3).

I.2 Exprimer : $\overline{\overline{I}}(O_2, S_2)$.

II – Cinétique : tous les qui suivent calculs seront effectués avec $\underline{\dot{\alpha} = \omega = Cste}$.

II.1 Calculer le torseur dynamique galiléen de (S_1) en O_1.

II.2 Calculer le torseur dynamique galiléen de (S_2) en G_2, puis en O.

II.3 Calculer le torseur dynamique galiléen de (S_3) en O_3.

II.4 Calculer l'énergie cinétique galiléenne du système ($S_1 + S_2 + S_3$).

III – Principe fondamental de la dynamique.

III.1 Effectuer le bilan des actions mécaniques extérieures agissant sur le système ($S_1 + S_2 + S_3$). On prendra soin de définir chaque action par un torseur.

III.2 Appliquer le principe fondamental de la dynamique au système ($S_1 + S_2 + S_3$).

III.3 En déduire les actions de la liaison 0/1 en fonction de la rotation d'entrée et de éléments caractérisant la géométrie des masses des différentes pièces.

III.4 Proposer une modification de l'architecture du mécanisme qui rende ces actions nulles ou constantes.

Correction du contrôle de dynamique

I - Géométrie des masses :

I.1 $\overline{\overline{I}}(O_1,S_1)=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}_1$ $\overline{\overline{I}}(G_2,S_2)=\begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{pmatrix}_{2,1}$ $\overline{\overline{I}}(O_3,S_3)=\begin{pmatrix} A_3 & 0 & 0 \\ 0 & B_3 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix}_{3,1}$

S_1 présente une symétrie de révolution autour de l'axe $(O_1,\vec{x}_{1,0})$, S_2 une symétrie sphérique et S_3 une symétrie de révolution autour de l'axe $(O_3,\vec{x}_{3,0})$.

I.2 Pour les mêmes raisons nous avons directement : $\overrightarrow{O_1G_1}=l_{G1}.\vec{x}_{0,1}$ et $\overrightarrow{O_3G_3}=l_{G3}.\vec{x}_{0,1,3}$

I.3 $\overline{\overline{I}}(O_2,S_2)=\begin{pmatrix} A_2+m_2.b^2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_2+m_2.b^2 \end{pmatrix}_2$ $\overrightarrow{O_2G_2} = b.\,\vec{y}_2$

II - Cinétique :

II.1 Calculer le torseur dynamique galiléen de (S_1) en O_1.

✧ $\overrightarrow{\delta^0_{(S_1)}}(O)=A_1.\ddot{\alpha}.\vec{x}_{0,1,3}=\vec{0}$ (S_1) pièce de révolution en rotation autour d'une direction fixe dans le galiléen et $\dot{\alpha}=\omega=Cste$

✧ $\overrightarrow{\Sigma^0_{(S_1)}}=\vec{0}$ G_1 fixe dans le galiléen

II.2 Calculer le torseur dynamique galiléen de (S_2) en G_2, puis en O_2.

✧ $\overrightarrow{\delta^0_{(S_2)}}(G_2)=\dfrac{d^0\,\overrightarrow{\mu^0_{(S_2)}}(G_2)}{dt}=\begin{pmatrix} 0 \\ -A_2.\dot{\beta}.\dot{\alpha} \\ A_2.\ddot{\beta} \end{pmatrix}_1$ avec $\vec{\Omega}^0_1=\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_1$ et $\overrightarrow{\mu^0_{(S_2)}}(G_2)=\begin{pmatrix} A_2.\dot{\alpha} \\ 0 \\ A_2.\dot{\beta} \end{pmatrix}_1$

✧ $\overrightarrow{\Sigma^0_{(S_2)}}=m_2.\overrightarrow{J^0(G_2)}$ avec :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{J^0(G_2)}&=\overrightarrow{J^1_2(G_2)}+\overrightarrow{J^0_1(G_2)}+2.\overrightarrow{\Omega^0_1}\wedge\overrightarrow{V^1_2(G_2)}\\&=-b.\ddot{\beta}.\vec{x}_2-b.\dot{\beta}^2.\vec{y}_2-(a+b.\cos\beta).\dot{\alpha}^2.\vec{y}_1-2.b.\dot{\alpha}.\dot{\beta}.\vec{z}_{1,2}\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\delta^0_{(S_2)}}(O)=\overrightarrow{\delta^0_{(S_2)}}(G_2)+\overrightarrow{OG_2}\wedge\overrightarrow{\Sigma^0_{(S_2)}}$$

✧
$$=\begin{pmatrix} -2.M.b.\dot{\alpha}.\dot{\beta}.(a+b\cos\beta) \\ -A_2.\dot{\beta}.\dot{\alpha}-2.M.b^2.\dot{\alpha}.\dot{\beta}.\sin\beta \\ (A_2+M.b.(b+a.\cos\beta)).\ddot{\beta}+M.a.b.\sin\beta.(\dot{\alpha}^2-\dot{\beta}^2.\sin\beta)+M.b^2\cos\beta.\sin\beta.\dot{\alpha}^2 \end{pmatrix}_1$$

II.3 Calculer le torseur dynamique galiléen de (S_3) en O_3.

✧ $\overrightarrow{\delta^0_{(S_3)}}(O_3)=\dfrac{d^0\,\overrightarrow{\mu^0_{(S_3)}}(O_3)}{dt}+m_3.\overrightarrow{V^0(O_3)}\wedge\overrightarrow{V^0(G_3)}=\dfrac{d^0\,\overrightarrow{\mu^0_{(S_3)}}(O_3)}{dt}$ car $\overrightarrow{V^0(O_3)}=\overrightarrow{V^0(G_3)}=\dot{x}.\vec{x}_{0,1,3}$

$\overrightarrow{\mu^0_{(S_3)}}(O_3)=\overline{\overline{I}}(O_3,S_3).\vec{\Omega}^0_3+\overrightarrow{O_3G_3}\wedge m_3.\overrightarrow{V^0(O_3)}=\overline{\overline{I}}(O_3,S_3).\vec{\Omega}^0_3$ car $\overrightarrow{O_3G_3}\ //\ \overrightarrow{V^0(O_3)}$

Donc : $\overrightarrow{\mu^0_{(S_3)}}(O_3)=A_3.\dot{\alpha}.\vec{x}_{0,1,3}$ et $\overrightarrow{\delta^0_{(S_3)}}(O_3)=\vec{0}$

✧ $\overrightarrow{\Sigma^0_{(S_3)}}=m_3.\overrightarrow{J^0(G_3)}=m_3.\ddot{x}.\vec{x}_{0,1,3}$

III – Principe fondamental de la dynamique.

III.1 Bilan des actions mécaniques extérieures agissant sur le système ($S_1+S_2+S_3$).

✧ Liaison 0/1 : $\{\mathsf{T}_{0/1}\} = \begin{cases} \overrightarrow{R_{01}} = X_{01}.\vec{x}_{0,1,3} + Y_{01}.\vec{y}_0 + Z_{01}.\vec{z}_0 \\ \overrightarrow{M_{01}}(O) = \vec{0} + M_{01}.\vec{y}_0 + N_{01}.\vec{z}_0 \end{cases}$

✧ Poids : $\{\mathsf{T}_{Poids/1+2+3}\} = \begin{cases} \overrightarrow{R_{P/1+2+3}} = -(M+m_1+m_3).g.\vec{x}_{0,1,3} \\ \overrightarrow{M_{P/1+2+3}}(O) = \overrightarrow{OG_2} \wedge -M.g.\vec{x}_{0,1,3} = M.g.(a+b.\cos\beta).\vec{z}_1 \end{cases}$

✧ Moteur : $\{\mathsf{T}_{Moteur/1}\} = \begin{cases} \overrightarrow{R_{Mot./1}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{Mot./1}}(-) = C_m.\vec{x}_{0,1,3} \end{cases}$

III.2 Appliquer le principe fondamental de la dynamique au système ($S_1+S_2+S_3$).

✧ Moment dynamique : $\overrightarrow{\delta^0_{(S_1+S_2+S_3)}}(O) = \overrightarrow{\delta^0_{(S_2)}}(O)$ car $\overrightarrow{\delta^0_{(S_1)}}(O) = \overrightarrow{\delta^0_{(S_3)}}(O) = \vec{0}$

✧ Résultante dynamique : $\overrightarrow{\Sigma^0_{(S_1+S_2+S_3)}} = \overrightarrow{\Sigma^0_{(S_2)}}(O) + m_3.\ddot{x}.\vec{x}_{0,1,3}$ car $\overrightarrow{\Sigma^0_{(S_1)}}(O) = \vec{0}$

✧ Mise en équation :

$$X_{01} - (M+m_1+m_3).g = -M.(b.\ddot{\beta}.\cos\beta - b.\dot{\beta}^2.\sin\beta) + m_3.c.(\ddot{\beta}.\sin\beta + \dot{\beta}^2.\cos\beta)$$
$$Y_{01} = -M.(b.\ddot{\beta}.\sin\beta + b.\dot{\beta}^2.\cos\beta + (a+b.\cos\beta).\dot{\alpha}^2)$$
$$Z_{01} = -2.M.b.\dot{\alpha}.\dot{\beta}$$
$$C_m = -2.M.b.\dot{\alpha}.\dot{\beta}.(a+b\cos\beta)$$
$$M_{01} = -A_2.\dot{\beta}.\dot{\alpha} - 2.M.b^2.\dot{\alpha}.\dot{\beta}.\sin\beta$$
$$N_{01} + M.g.(a+b.\cos\beta) = (A_2 + M.b.(b+a.\cos\beta)).\ddot{\beta} + M.a.b.\sin\beta.(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}^2.\sin\beta) + M.b^2\cos\beta.\sin\beta.\dot{\alpha}^2$$

III.3 Actions de la liaison 0/1

$$X_{01} = (M+m_1+m_3).g - M.(b.\ddot{\beta}.\cos\beta - b.\dot{\beta}^2.\sin\beta) + m_3.c.(\ddot{\beta}.\sin\beta + \dot{\beta}^2.\cos\beta)$$
$$Y_{01} = -M.(b.\ddot{\beta}.\sin\beta + b.\dot{\beta}^2.\cos\beta + (a+b.\cos\beta).\dot{\alpha}^2)$$
$$Z_{01} = -2.M.b.\dot{\alpha}.\dot{\beta}$$
$$M_{01} = -A_2.\dot{\beta}.\dot{\alpha} - 2.M.b^2.\dot{\alpha}.\dot{\beta}.\sin\beta$$
$$N_{01} = -M.g.(a+b.\cos\beta) + (A_2 + M.b.(b+a.\cos\beta)).\ddot{\beta} + M.a.b.\sin\beta.(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}^2.\sin\beta) + M.b^2\cos\beta.\sin\beta.\dot{\alpha}^2$$

III.4 Actions de liaison constante.

Pour que les actions de liaisons soient nulles ou constantes, il suffit d'adjoindre d'autres masselottes au système. Par exemple : une deuxième masselotte (position O'_2 symétrique de O_2 / $(O,\vec{x}_{0,1})$ ou trois masselottes à 120° ou quatre masselottes à 90°. Dans ce contexte le torseur dynamique de l'ensemble des masselottes est nul. Par contre le torseur dynamique galiléen de S_3 n'est nul qu'à l'état stationnaire : $\beta = \beta^* = Cste$, $x = x^* = -c.\cos\beta^* = Cste$ et $\dot{\alpha} = \omega = Cste$ car la composante en $''\ddot{x}''$ ne peut pas être compensée autrement.