MARS 2007

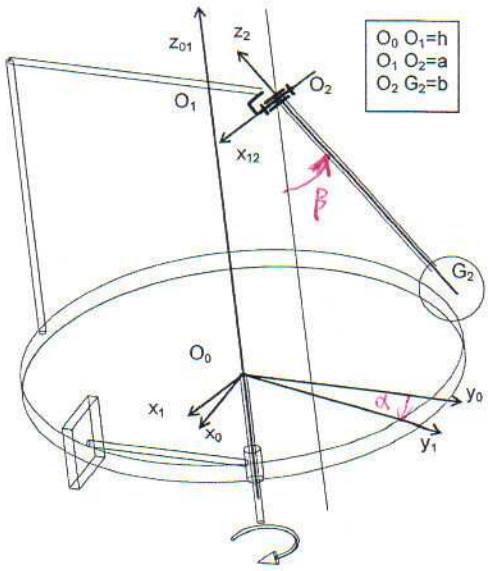
INTERROGATION DE MECANIQUE.

Durée 1h15 + 15'

Formulaire autorisé.

Exercice 1 : .

Soit un système contitué d'un plateau cylindrique (1) de moment d'inertie C_1 par rapport à $(O_0, \vec{z}_{01})$ et de masse m_1, en liaison pivot avec (0) d'axe $(O_0, \vec{z}_{01})$. le paramètre de mouvement est $(\vec{x}_0, \vec{x}_1) = \alpha$ et d'un pendule (2) en liaison pivot avec (1) d'axe $(O_2, \vec{x}_{12})$, le paramètre de mouvement est $(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \beta$, la masse de la tige est négligée la sphère est de rayon r et masse m_2.



1- Déterminer le torseur dynamique de (2) en O_2.
2- Déterminer le torseur dynamique de (1)+(2) en O_1.
3- Déterminer le torseur des efforts agissant sur (2) en O_2.
4- On impose un couple moteur C_m sur (1). Déterminer le torseur des efforts agissant sur (1)+(2) en O_1.
5- En déduire les équations du mouvement.

Exercice 2.

Le vilebrequin présente deux plans de symétrie $(O, \vec{x}_1, \vec{z}_1)$ et $(O, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

Le centre de masse appartient donc à l'intersection de ces deux plans, il est ainsi situé sur l'axe $(O, \vec{z}_1)$.

Le vilebrequin représenté est schématisé sur la Figure 2, il est constitué des volumes élémentaires suivants :-deux manetons de paliers identiques S_p et S'_p de centre de masse G_p et G'_p et de masse individuelle m_p

-deux masselottes identiques S_m et S'_m de centre de masse G_m et G'_m et de masse individuelle m_m

-un maneton de bielle S_b de centre de masse A et de masse m_b

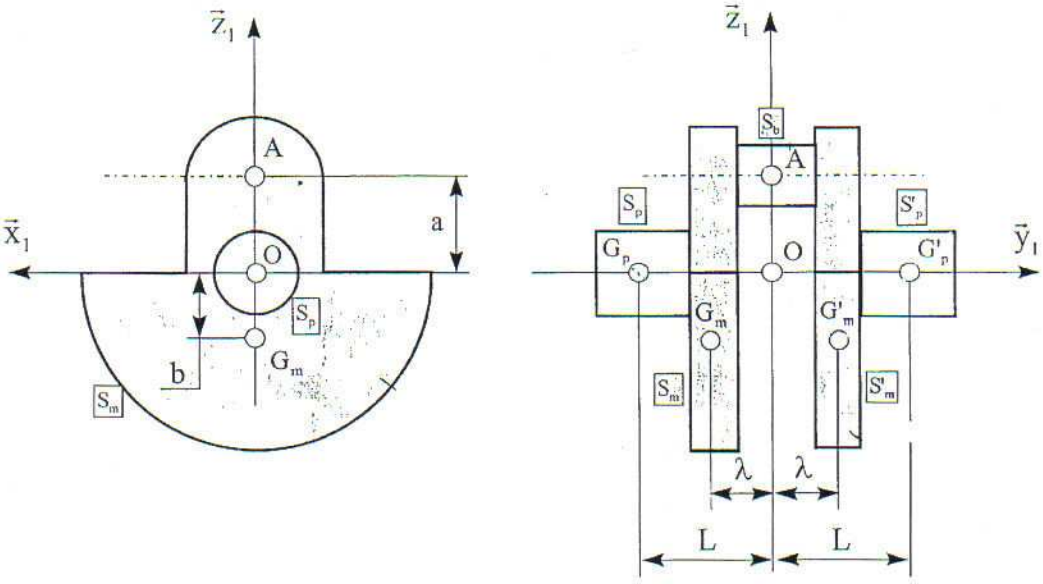


Figure 2 : Décomposition du vilebrequin en solides élémentaires

1- Définir la position du centre de masse du vilebrequin en fonction des paramètres donnés sur la figure et des masses m_p, m_m et m_b

2- Donner pour chaque volume élémentaire (Sp, S'p, Sm, S'm et Sb) la forme de sa matrice d'inertie. Ces matrices seront exprimées au centre de masse de chaque volume (voir notations).Calculer la matrice du vilebrequin à partir des matrices d'inertie des volumes élémentaires obtenues à la question 2 et les distances définies sur la figure 2.

$$\bar{\bar{I}}(G_p, (S_p)) = \bar{\bar{I}}(G'_p, (S'_p)) = \begin{pmatrix} A_p & -F_p & -E_p \\ -F_p & B_p & -D_p \\ -E_p & -D_p & C_p \end{pmatrix}_1$$

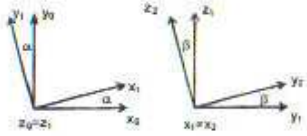
$$\bar{\bar{I}}(G_m, (S_m)) = \bar{\bar{I}}(G'_m, (S'_m)) = \begin{pmatrix} A_m & -F_m & -E_m \\ -F_m & B_m & -D_m \\ -E_m & -D_m & C_m \end{pmatrix}_1$$

$$\bar{\bar{I}}(A, (S_b)) = \begin{pmatrix} A_b & -F_b & -E_b \\ -F_b & B_b & -D_b \\ -E_b & -D_b & C_b \end{pmatrix}_1$$

$$\bar{\bar{I}}(O, (S_1)) = \begin{pmatrix} A_1 & -F_1 & -E_1 \\ -F_1 & B_1 & -D_1 \\ -E_1 & -D_1 & C_1 \end{pmatrix}_1$$

1- Déterminer le torseur dynamique de (2) en O_2 : $\bar{\bar{I}}(G_2,S_2)=\begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{bmatrix}_{R2}$ $\quad A_2=\dfrac{2mr^2}{5}$

$\overrightarrow{O_0G_2}=h\,\overrightarrow{z_{10}}+a\,\overrightarrow{y_{12}}-b\,\overrightarrow{z_2}=(a+b\sin\beta)\,\overrightarrow{y_1}+(h-b\cos\beta)\,\overrightarrow{z_1}$ $\quad \overrightarrow{\Omega_{2/0}}=\dot\alpha\,\overrightarrow{z_{10}}+\dot\beta\,\overrightarrow{y_{12}}$



$$\overrightarrow{V(G_2,2/0)}=\begin{bmatrix} 0 \\ b\dot\beta\cos\beta \\ b\dot\beta\sin\beta \end{bmatrix}_{R1}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\alpha \end{bmatrix}_{R1}\wedge\begin{bmatrix} 0 \\ a+b\sin\beta \\ h-b\cos\beta \end{bmatrix}_{R1}=\begin{bmatrix} -\dot\alpha(a+b\sin\beta) \\ b\dot\beta\cos\beta \\ b\dot\beta\sin\beta \end{bmatrix}_{R1}$$

$$\overrightarrow{\Gamma(G_2,2/0)}=\begin{bmatrix} -\ddot\alpha(a+b\sin\beta)-b\dot\alpha\dot\beta\cos\beta \\ b\ddot\beta\cos\beta-b\dot\beta^2\sin\beta \\ b\ddot\beta\sin\beta+b\dot\beta^2\cos\beta \end{bmatrix}_{R1}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\alpha \end{bmatrix}_{R1}\wedge\begin{bmatrix} -\dot\alpha(a+b\sin\beta) \\ b\dot\beta\cos\beta \\ b\dot\beta\sin\beta \end{bmatrix}_{R1}=\begin{bmatrix} -\ddot\alpha(a+b\sin\beta)-b\dot\alpha\dot\beta\cos\beta-b\dot\beta\dot\alpha\cos\beta \\ b\ddot\beta\cos\beta-b\dot\beta^2\sin\beta-\dot\alpha^2(a+b\sin\beta) \\ b\ddot\beta\sin\beta+b\dot\beta^2\cos\beta \end{bmatrix}_{R1}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma(G_2,2/0)}=\begin{bmatrix} -\ddot\alpha(a+b\sin\beta)-2b\dot\alpha\dot\beta\cos\beta \\ b\ddot\beta\cos\beta-b\dot\beta^2\sin\beta-\dot\alpha^2(a+b\sin\beta) \\ b\ddot\beta\sin\beta+b\dot\beta^2\cos\beta \end{bmatrix}_{R1}}$$

$\overrightarrow{\sigma(G_2,2/0)}=\bar{\bar{I}}(G_2,2)\,\overrightarrow{\Omega_{2/0}}$ $\qquad$ $\overrightarrow{\sigma(G_2,2/0)}=\begin{bmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 \end{bmatrix}_{R2R1}\begin{bmatrix} \dot\beta \\ 0 \\ \dot\alpha \end{bmatrix}_{R1}=A_2\begin{bmatrix} \dot\beta \\ 0 \\ \dot\alpha \end{bmatrix}_{R1}$

$$\boxed{\overrightarrow{\delta(G_2,2/0)}=A_2\begin{bmatrix} \ddot\beta \\ 0 \\ \ddot\alpha \end{bmatrix}_{R1}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\alpha \end{bmatrix}_{R1}\wedge A_2\begin{bmatrix} \dot\beta \\ 0 \\ \dot\alpha \end{bmatrix}_{R1}=A_2\begin{bmatrix} \ddot\beta \\ \dot\alpha\dot\beta \\ \ddot\alpha \end{bmatrix}_{R1}}$$

$$\overrightarrow{\delta(O_2,2/0)}=\overrightarrow{\delta(G_2,2/0)}+\overrightarrow{O_2G_2}\wedge m_2\overrightarrow{\Gamma(G_2,2/0)}=A_2\begin{bmatrix} \ddot\beta \\ \dot\alpha\dot\beta \\ \ddot\alpha \end{bmatrix}_{R1}+m_2\begin{bmatrix} 0 \\ b\sin\beta \\ -b\cos\beta \end{bmatrix}_{R1}\wedge\begin{bmatrix} -\ddot\alpha(a+b\sin\beta)-2b\dot\alpha\dot\beta\cos\beta \\ b\ddot\beta\cos\beta-b\dot\beta^2\sin\beta-\dot\alpha^2(a+b\sin\beta) \\ b\ddot\beta\sin\beta+b\dot\beta^2\cos\beta \end{bmatrix}_{R1}$$

$$\overrightarrow{\delta(O_2,2/0)}=A_2\begin{bmatrix} \ddot\beta \\ \dot\alpha\dot\beta \\ \ddot\alpha \end{bmatrix}_{R1}+m_2\begin{bmatrix} b\sin\beta(b\ddot\beta\sin\beta+b\dot\beta^2\cos\beta)+b\cos\beta(b\ddot\beta\cos\beta-b\dot\beta^2\sin\beta+\dot\alpha^2(a+b\sin\beta)) \\ (-b\cos\beta)(-\ddot\alpha(a+b\sin\beta)-2b\dot\alpha\dot\beta\cos\beta) \\ -(-b\sin\beta)(-\ddot\alpha(a+b\sin\beta)-2b\dot\alpha\dot\beta\cos\beta) \end{bmatrix}_{R1}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\delta(O_2,2/0)}=\begin{bmatrix} A_2\ddot\beta+m_2(b^2\ddot\beta+\dot\alpha^2b\cos\beta(a+b\sin\beta)) \\ A_2\dot\alpha\dot\beta+m_2(\ddot\alpha b\cos\beta(a+b\sin\beta)-2b^2\dot\alpha\dot\beta\cos^2\beta) \\ A_2\ddot\alpha+m_2(-\ddot\alpha b\sin\beta(a+b\sin\beta)-2b^2\dot\alpha\dot\beta\cos\beta\sin\beta) \end{bmatrix}_{R1}}$$

$$\boxed{\{\mathcal{D}_{2/0}\}:\begin{Bmatrix} m_2\overrightarrow{\Gamma(G_2,2/0)} \\ \overrightarrow{\delta(G_2,2/0)} \end{Bmatrix}}$$

2- Déterminer le torseur dynamique de (1)+(2) en O_1.

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma(G_1,1/0)}=\overrightarrow{\Gamma(O_1,1/0)}=\overrightarrow{0}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma(G_2,2/0)}=\begin{bmatrix} -\ddot\alpha(a+b\sin\beta)-2b\dot\alpha\dot\beta\cos\beta \\ b\ddot\beta\cos\beta-b\dot\beta^2\sin\beta-\dot\alpha^2(a+b\sin\beta) \\ b\ddot\beta\sin\beta+b\dot\beta^2\cos\beta \end{bmatrix}_{R1}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\delta(O_1,1/0)}=C_1\ddot\alpha\,\overrightarrow{z_1}}$$

$$\overrightarrow{\delta(O_1,2/0)}=\overrightarrow{\delta(G_2,2/0)}+\overrightarrow{O_1G_2}\wedge m\overrightarrow{\Gamma(G_2,2/0)}=A_2\begin{bmatrix} \ddot\beta \\ \dot\alpha\dot\beta \\ \ddot\alpha \end{bmatrix}_{R1}+\begin{bmatrix} 0 \\ a-b\sin\beta \\ b\cos\beta \end{bmatrix}_{R1}\wedge\begin{bmatrix} -\ddot\alpha(a+b\sin\beta)-2b\dot\alpha\dot\beta\cos\beta \\ b\ddot\beta\cos\beta-b\dot\beta^2\sin\beta-\dot\alpha^2(a+b\sin\beta) \\ b\ddot\beta\sin\beta+b\dot\beta^2\cos\beta \end{bmatrix}_{R1}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\delta(O_1,2/0)}=\begin{bmatrix} A_2\ddot\beta+m_2((a-b\sin\beta)(b\ddot\beta\sin\beta+b\dot\beta^2\cos\beta)-b\cos\beta(b\ddot\beta\cos\beta-b\dot\beta^2\sin\beta-\dot\alpha^2(a+b\sin\beta))) \\ A_2\dot\alpha\dot\beta-m_2b\cos\beta(\ddot\alpha(a+b\sin\beta)+2b\dot\alpha\dot\beta\cos\beta) \\ A_2\ddot\alpha+m_2(a-b\sin\beta)(\ddot\alpha(a+b\sin\beta)+2b\dot\alpha\dot\beta\cos\beta) \end{bmatrix}_{R1}}$$

$$\boxed{\{\mathcal{D}_{1+2/0}\}:\begin{Bmatrix} m_1\overrightarrow{\Gamma(G_1,1/0)}+m_2\overrightarrow{\Gamma(G_2,2/0)} \\ \overrightarrow{\delta(O_1,1/0)}+\overrightarrow{\delta(O_1,2/0)} \end{Bmatrix}}$$

3- Déterminer le torseur des efforts agissant sur (2) en O_2.

$$\{\mathcal{P}_2\}=\begin{Bmatrix} mg\,\vec{z}_0 \\ b\,\vec{z}_{12}\wedge mg\,\vec{z}_0 \end{Bmatrix}\quad \{\mathcal{F}_{1/2}\}=\begin{Bmatrix} X_{12}\,\vec{x}_2+Y_{12}\,\vec{y}_2+Z_{12}\,\vec{z}_2 \\ M_{12}\,\vec{y}_2+N_{12}\,\vec{z}_2 \end{Bmatrix}$$

4- On impose un couple moteur C_m sur (1). Déterminer le torseur des efforts agissant sur (1)+(2) en O_1.

$$\{\mathcal{P}_2\}=\begin{Bmatrix} mg\,\vec{z}_0 \\ (a\,\vec{y}_1+b\,\vec{z}_{12})\wedge mg\,\vec{z}_0 \end{Bmatrix}\quad \{\mathcal{P}_2\}=\begin{Bmatrix} mg\,\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}\quad \{\mathcal{F}_{0/1}\}=\begin{Bmatrix} X_{01}\,\vec{x}_1+Y_{01}\,\vec{y}_1+Z_{01}\,\vec{z}_1 \\ L_{01}\,\vec{x}_1+M_{01}\,\vec{y}_1 \end{Bmatrix}\quad \{\mathcal{C}_{0/1}\}=\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ Cm\,\vec{z}_{10} \end{Bmatrix}$$

5- En déduire les équations du mouvement.

Exercice 2.

1- Position du centre de masse du vilebrequin : $\overrightarrow{OG}=\dfrac{(m_b.a-2m_m.b)}{2(m_p+m_m)+m_b}\vec{z}_1$

2- Formes des matrices d'inerties de chaque volume élémentaire aux centres de masse de chaque volume

$$\bar{\bar{I}}(Gp,Sp)=\bar{\bar{I}}(G'p,S'p)=\begin{pmatrix} Ap & & \\ & Bp & \\ & & Ap \end{pmatrix}_1\quad \bar{\bar{I}}(A,Sb)=\begin{pmatrix} Ab & & \\ & Bb & \\ & & Ab \end{pmatrix}_1\quad \bar{\bar{I}}(Gm,Sm)=\bar{\bar{I}}(G'm,S'm)=\begin{pmatrix} Am & & \\ & Bm & \\ & & Cm \end{pmatrix}_1$$

$$\bar{\bar{I}}(O,S_1)=\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & B_1 & \\ & & C_1 \end{pmatrix}_1$$

3- Calcule de la matrice du vilebrequin.

$$\bar{\bar{I}}(O,(S_p))=\bar{\bar{I}}(O,(S'_p))=\begin{pmatrix} A_p+m_p.L^2 & 0 & 0 \\ 0 & B_p & 0 \\ 0 & 0 & A_p+m_p.L^2 \end{pmatrix}_1 \quad \text{car} \quad \overrightarrow{OG'_p}=-\overrightarrow{OG_p}=L.\vec{y}_1$$

$$\bar{\bar{I}}(O,(S_b))=\begin{pmatrix} A_b+m_b.a^2 & 0 & 0 \\ 0 & B_b+m_b.a^2 & 0 \\ 0 & 0 & A_b \end{pmatrix}_1 \quad \text{car} \quad \overrightarrow{OA}=a.\vec{z}_1$$

$$\bar{\bar{I}}(O,(S_m))=\begin{pmatrix} A_m+m_m.(\lambda^2+b^2) & 0 & 0 \\ 0 & B_m+m_m.b^2 & -m_m.\lambda.b \\ 0 & -m_m.\lambda.b & C_m+m_m.\lambda^2 \end{pmatrix}_1 \quad \text{car} \quad \overrightarrow{OG_m}=-\lambda.\vec{y}_1-b.\vec{z}_1$$

$$\bar{\bar{I}}(O,(S'_m))=\begin{pmatrix} A_m+m_m.(\lambda^2+b^2) & 0 & 0 \\ 0 & B_m+m_m.b^2 & m_m.\lambda.b \\ 0 & m_m.\lambda.b & C_m+m_m.\lambda^2 \end{pmatrix}_1 \quad \text{car} \quad \overrightarrow{OG_m}=\lambda.\vec{y}_1-b.\vec{z}_1$$

Il vient finalement :

$$\boxed{\bar{\bar{I}}(O,(S_1))=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_1}$$

avec :

$$\boxed{\begin{aligned} A_1 &= 2.(A_p+m_p.L^2)+A_b+m_b.a^2+2.(A_m+m_m.(\lambda^2+b^2)) \\ B_1 &= 2.B_p+B_b+m_b.a^2+2.(B_m+m_m.b^2) \\ C_1 &= 2.(A_p+m_p.L^2)+A_b+2.(C_m+m_m.\lambda^2) \end{aligned}}$$