Mécanique générale

Etude d'un système came / poussoir

Le schéma cinématique du mécanisme étudié est donné sur la figure 1 en annexe, il est constitué :

* d'un arbre à came S_1 en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z}_{0,1})$ avec le bâti S_0 et de paramètre de mouvement : $\psi = (\vec{x}_0,\vec{x}_1)$,
* d'un poussoir S_2 en liaison glissière avec S_0 et de paramètre de mouvement : $x = \overrightarrow{OO_2}.\vec{x}_{0,2}$
* d'un ressort de longueur à vide L_0 et de raideur k situé entre le bâti et le poussoir. Ce ressort est toujours en compression ($(L-R)<L_0$) et la résultante des actions mécaniques qu'il exerce sur le poussoir S_2 est : $\vec{R}_{R/2} = k.((L-x)-L_0).\vec{x}_{0,2}$

Par ailleurs , le mécanisme sera étudié sous les hypothèses suivantes :

* les liaisons 0/1 et 0/2 sont parfaites et la liaison 1/2 est supposée **ponctuelle sans frottement,** les torseurs d'actions mécaniques sont tels que :

$$\vec{M}_{0/1}(O).\vec{z}_{0,1} = 0 \qquad \vec{R}_{0/2}.\vec{x}_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \{T_{2/1}\} = \begin{cases} \vec{R}_{2/1} = X_{21}\,\vec{x}_0 \\ \vec{M}_{2/1}(I) = \vec{0} \end{cases}$$

* l'axe $\vec{y}_0$ est vertical ascendant et $R_0 = (O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ est galiléen.
* Un moteur, non représenté, entraîne la came avec une vitesse de rotation $\dot{\psi} = \omega = Cste > 0$. Pour cela il exerce sur S_1 un torseur couple d'intensité : $C_m.\vec{z}_{0,1}$.
* La came S_1, de masse m_1, est représentée sur la figure 2 en annexe.
* Le poussoir S_2 est un solide de révolution d'axe $(O_2,\vec{x}_0)$ et de masse m_2.

I Cinématique.

1.1 Ecrire l'équation de liaison traduisant le contact en I.

II Géométrie des masses & cinétique.

2.1 Donner la position du centre de masse G_1 de l'arbre à came S_1 en fonction des données géométriques définies sur la figure 2.

2.2 Donner la forme de la matrice d'inertie en O de l'arbre à came S_1 : $\bar{\bar{I}}(O,S_1)$ (notations : $A_1,B_1,\cdots$).

2.3 L'équilibrage statique et dynamique de cette pièce est-il réalisé ?

2.4 Donner le moment d'inertie C_1 de l'arbre à came S_1 autour de la droite $O,\vec{z}_{0,1}$ en fonction des caractéristiques géométriques (figure 2) et de la masse volumique ρ.

2.5 Donner la forme de la matrice d'inertie en O_2 du poussoir S_2 : $\bar{\bar{I}}(O_2,S_2)$ (notations : $A_2,B_2,\cdots$).

2.6 Donner l'énergie cinétique de l'ensemble $S_1 \cup S_2$.

2.7 Exprimer le torseur cinétique galiléen de S_1 en O et de S_2 en O_2.

2.8 Exprimer le torseur dynamique galiléen de S_1 en O et de S_2 en O_2.

III Dynamique.

3.1 Appliquer le Théorème du moment dynamique à S_1 en projection sur $(O,\vec{z}_{0,1})$.

3.2 Appliquer le Théorème de la Résultante Dynamique à S_2 en projection sur $\vec{x}_0$.

IV Bilan

4.1 Déduire de l'ensemble de cette analyse l'évolution de l'action de contact $X_{12}(t)$, du couple moteur $C_m(t)$ et de la position du poussoir $x(t)$.

Annexe :

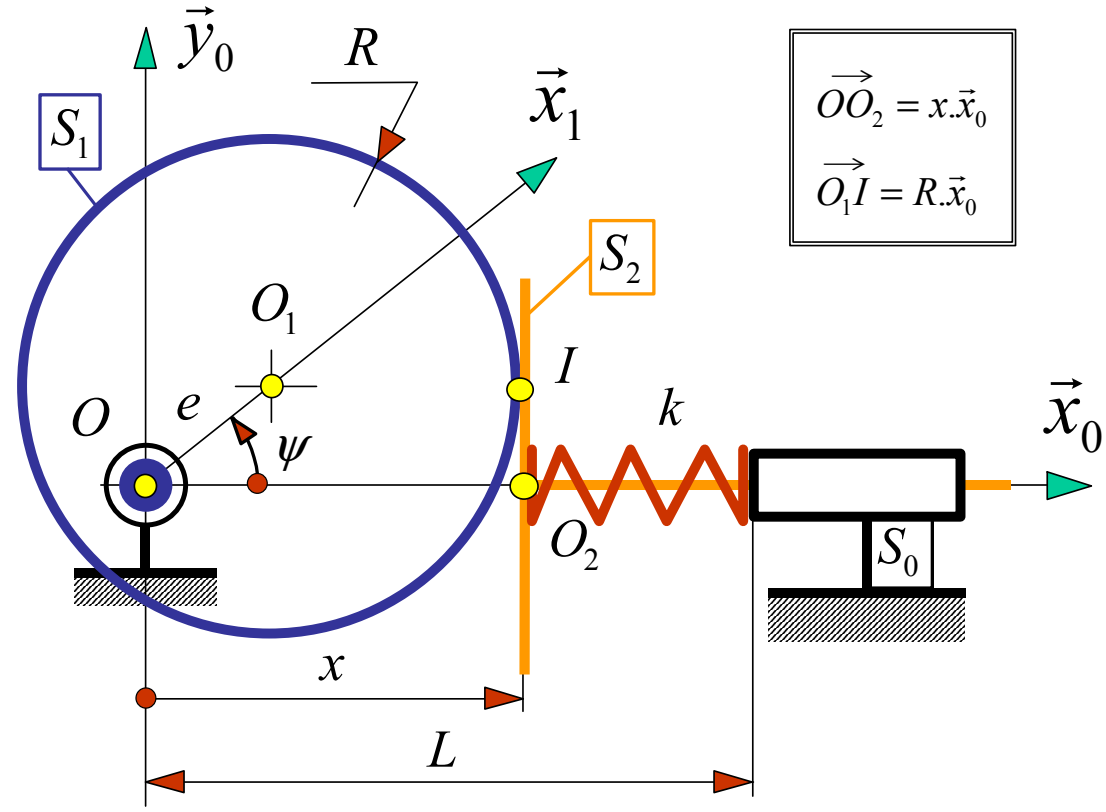

Figure 1 : Schéma cinématique

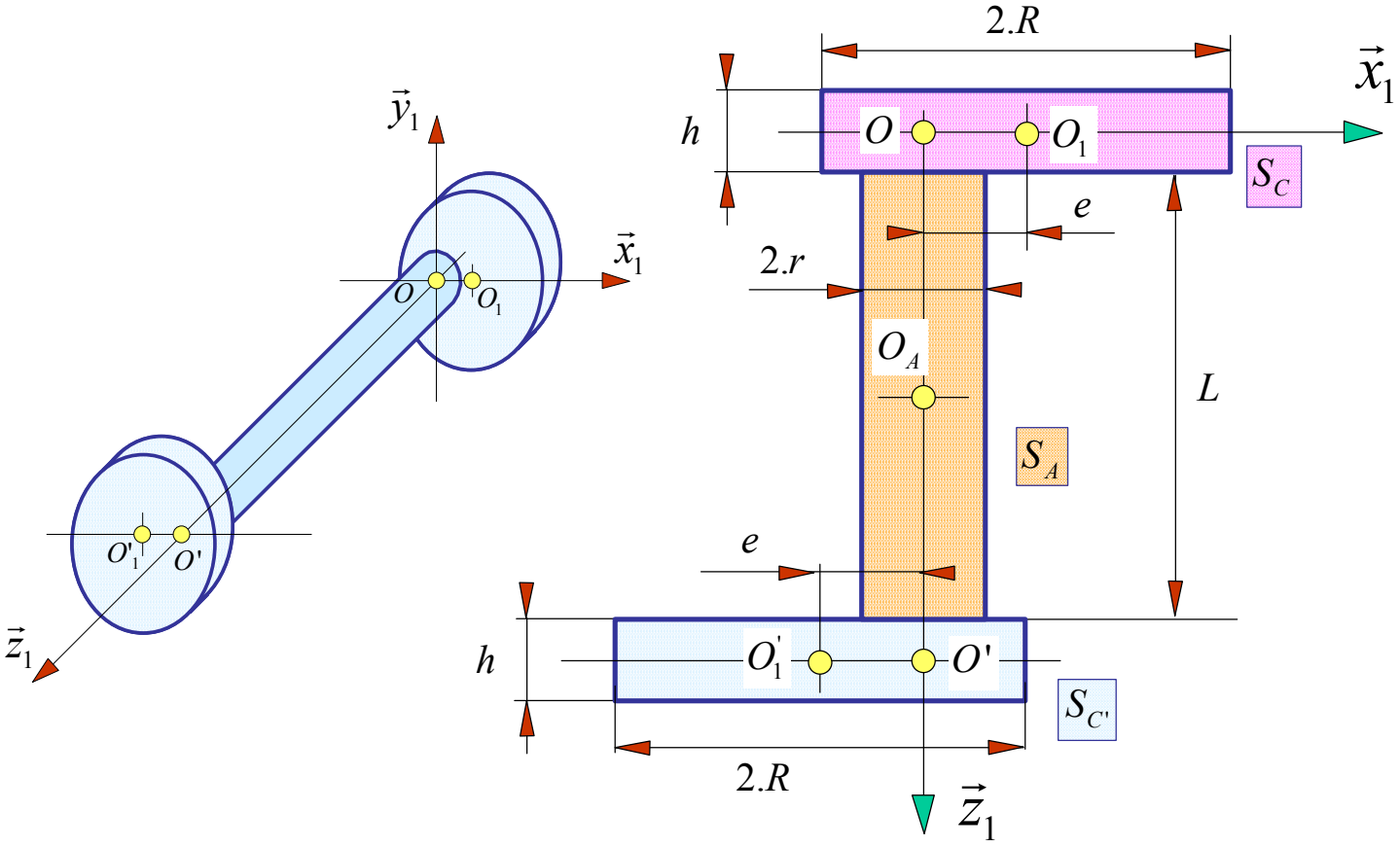

Figure 2 : Arbre à came

Mécanique générale

Etude d'un système came / poussoir

I Cinématique.

1.1 Equation de liaison traduisant le contact en I :

La fermeture de chaîne en I impose : $\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1I}+\overrightarrow{IO_2}+\overrightarrow{O_2O}=\vec{0}$

Soit en projection sur $\vec{x}_{0,2}$: $\boxed{x=e.\cos\psi+R}$

Et en projection sur $\vec{y}_0$: $\overrightarrow{O_2I}=e.\sin\psi.\vec{y}_0$

II Géométrie des masses.

2.1 - centre de masse G_1 de S_1 :

Le centre de masse est localisé par la relation : $M_T.\overrightarrow{O_AG_1}=m_C.\overrightarrow{O_AO_1}+m_{C'}.\overrightarrow{O_AO'_1}+m_A.\overrightarrow{O_AO_A}=\vec{0}$

Soit : $\boxed{G_1\equiv O_A \qquad \overrightarrow{OG_1}=\frac{(h+L)}{2}.\vec{z}_{0,1}}$

Ce résultat peut également être énoncé directement car O_A est centre de symétrie pour la pièce qui est homogène.

2.2 Forme de la matrice d'inertie $\overline{\overline{I}}(O,S_1)$:

L'arbre à cames S_1 ne possède qu'un seul plan de symétrie : $(O,\vec{x}_1,\vec{z}_1)$, sa matrice d'inertie en O est donc de la forme :

$$\boxed{\overline{\overline{I}}(O,S_1)=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & -E_1 \\ 0 & B_1 & 0 \\ -E_1 & 0 & C_1 \end{pmatrix}_1}$$

2.3 Equilibrage statique et dynamique :

L'équilibrage statique est réalisé car le centre de masse est situé sur l'axe de rotation, par contre l'équilibrage dynamique n'est pas réalisé car la direction $(O,\vec{z}_1)$ n'est pas une direction principale d'inertie.

2.4 Moment d'inertie $C_1=I_{(O,\vec{z}_{0,1})}$:

Cette pièce est constituée de 3 cylindres de révolution, en accord avec les notations de l'énoncé, nous pouvons écrire :

Cylindres S_C : $I_{(O_1,\vec{z}_{0,1})}=\frac{m_C.R^2}{2}$ Huygens $I_{(O,\vec{z}_{0,1})}=\frac{m_C.R^2}{2}+m_C.e^2$

Cylindres $S_{C'}$: $I_{(O'_1,\vec{z}_{0,1})}=\frac{m_C.R^2}{2}$ Huygens $I_{(O,\vec{z}_{0,1})}=I_{(O',\vec{z}_{0,1})}=\frac{m_C.R^2}{2}+m_C.e^2$

Cylindre S_A : $I_{(O,\vec{z}_{0,1})}=\frac{m_A.r^2}{2}$

Finalement : $$\boxed{C_1 = \frac{m_A.r^2}{2} + m_C.(R^2 + 2.e^2) = \rho.\pi.\left(\frac{r^4.L}{2} + R^2.h.(R^2 + 2.e^2)\right)}$$

2.5 forme de la matrice d'inertie $\overline{\overline{I}}(O_2, S_2)$ **.**

Le poussoir S_2 est un pièce de révolution d'axe $(O_2, \vec{x}_{0,2})$. Par conséquent :

$$\boxed{\overline{\overline{I}}(O_2, S_2) = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}_2}$$

2.6 Energie cinétique de l'ensemble $S_1 \cup S_2$

Le mouvement 1/0 est une rotation autour de la direction $(O, \vec{z}_{0,1})$ qui est fixe dans le galiléen et le mouvement 2/0 est une translation rectiligne de direction $\vec{x}_{0,2}$. Il vient directement :

$$\boxed{T^0_{S_1 \cup S_2} = \frac{1}{2}.C_1.\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}.m_2.\dot{x}^2}$$

2.7 Torseurs cinétique galiléens de S_1 ***en*** O ***et de*** S_2 ***en*** O_2 **.**

Torseur dynamique galiléen de S_1 ***en*** O **:**

Moment cinétique : $\vec{\mu}^0_{(S_1)}(O) = \overline{\overline{I}}(O, S_1).\vec{\Omega}^0_1$ car O est fixe dans R_0, donc : $\boxed{\vec{\mu}^0_{(S_1)}(O) = \begin{pmatrix} -E_1.\dot{\psi} \\ 0 \\ C_1.\dot{\psi} \end{pmatrix}_1}$

Résultante cinétique : $\boxed{\vec{\sigma}^0_{(S_1)} = m_1.\vec{V}^0(O_A) = \vec{0}}$ car O_A est fixe dans R_0.

Torseur cinétique galiléen de S_2 ***en*** O_2 **:**

Moment cinétique : $\boxed{\vec{\mu}^0_{(S_2)}(G_2) = \vec{0}}$ car $\vec{\Omega}^0_2 = \vec{0}$

Résultante cinétique : $\boxed{\vec{\sigma}^0_{(S_2)} = m_2.\vec{V}^0(G_2) = m_2.\vec{V}^0(O_2) = m_2.\dot{x}.\vec{x}_{0,2}}$ car 2/0 translation.

2.8 Torseurs dynamiques galiléens de S_1 ***en*** O ***et de*** S_2 ***en*** O_2 **.**

Torseur dynamique galiléen de S_1 ***en*** O **:**

Moment dynamique : $\vec{\delta}^0_{(S_1)}(O) = \frac{d^0 \vec{\mu}^0_{(S_1)}(O)}{dt}$ car O est fixe dans R_0.

Donc : $$\boxed{\vec{\delta}^0_{(S_1)}(O) = \begin{pmatrix} -E_1.\ddot{\psi} \\ 0 \\ C_1.\ddot{\psi} \end{pmatrix}_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}_1 \wedge \begin{pmatrix} -E_1.\dot{\psi} \\ 0 \\ C_1.\dot{\psi} \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} -E_1.\ddot{\psi} \\ -E_1.\dot{\psi}^2 \\ C_1.\ddot{\psi} \end{pmatrix}_1}$$

Résultante dynamique : $\boxed{\vec{\Sigma}^0_{(S_1)} = m_1.\vec{J}^0(O_A) = \vec{0}}$ car O_A est fixe dans R_0.

Torseur dynamique galiléen de S_2 en O_2 :

Moment dynamique : $\boxed{\overrightarrow{\delta^0_{(S_2)}}(G_2)=\dfrac{d^0\vec{\mu}^0_{(S_2)}(G_2)}{dt}=\vec{0}}$ car $\vec{\mu}^0_{(S_2)}(G_2)=\vec{0}$

Résultante dynamique : $\boxed{\vec{\Sigma}^0_{(S_2)}=m_2.\vec{J}^0(G_2)=m_2.\vec{J}^0(O_2)=m_2.\ddot{x}.\vec{x}_{0,2}}$ car 2/0 translation.

III Dynamique.

3.1 Théorème du moment dynamique à S_1 en projection sur $(O,\vec{z}_{0,1})$: $\vec{\delta}^0_{(S_1)}(O).\vec{z}_{0,1}=\vec{M}_{Ext/S_1}(O).\vec{z}_{0,1}$

Cinétique : $\vec{\delta}^0_{(S_1)}(O).\vec{z}_{0,1}=C_1\ddot{\psi}$ (c.f. ci-dessus)

Actions mécaniques extérieures :

Poids :	$\vec{M}_{P/1}(O)=\overrightarrow{OG_1}\wedge -m_1.g.\vec{y}_0=\vec{0}$	glisseur de support $(G_1,\vec{y}_0)$
Liaison 0/1 :	$\vec{M}_{0/1}(O).\vec{z}_{0,1}=\vec{0}$	(pivot d'axe $(O,\vec{z}_{0,1})$)
Liaison 2/1 :	$\vec{M}_{2/1}(O)=\overrightarrow{OI}\wedge X_{21}.\vec{x}_0=-e.\sin\psi.X_{21}.\vec{z}_{0,1}$	(ponctuelle parfaite en I)
Moteur :	$\vec{M}_{M/1}(-)=C_m.\vec{z}_{0,1}$	(torseur couple)

Mise en équation : $\boxed{C_1.\ddot{\psi}=-e.\sin\psi.X_{21}+C_m}$

3.2 Théorème de la Résultante Dynamique à S_2 en projection sur $\vec{x}_0$: $\vec{\Sigma}^0_{(S_1)}.\vec{x}_{0,2}=\vec{R}_{Ext/2}.\vec{x}_{0,2}$

Cinétique : $\vec{R}_{Ext/2}.\vec{x}_{0,2}=m_2\,\ddot{x}$ (c.f. ci-dessus)

Actions mécaniques extérieures :

Poids :	$\vec{R}_{P/2}.\vec{x}_0=0$	glisseur de support $(G_2,\vec{y}_0)$
Liaison 0/2 :	$\vec{R}_{0/2}.\vec{x}_0=0$	(pivot d'axe $(O,\vec{x}_{0,2})$)
Liaison 2/1 :	$\vec{R}_{1/2}=-\vec{R}_{2/1}=-X_{21}.\vec{x}_{0,2}$	(ponctuelle parfaite en I)
Ressort :	$\vec{R}_{R/2}=k.((L-x)-L_0).\vec{x}_0$	glisseur de support $(O_2,\vec{x}_{0,2})$

Mise en équation :

Théorème de la Résultante Dynamique à S_2 en projection sur $\vec{x}_0$:

$$\boxed{m_2.\ddot{x}=-X_{21}+k.((L-x)-L_0)}$$

IV Bilan

4.1 Evolution temporelle de l'action de contact $X_{12}(t)$, du couple moteur $C_m(t)$ et de la position du poussoir $x(t)$:

Les équations obtenues pour caractériser ces grandeur sont :

$$x=e.\cos\psi+R \qquad C_1.\ddot{\psi}=-e.\sin\psi.X_{21}+C_m \qquad m_2.\ddot{x}=-X_{21}+k.(L-x-L_0)$$

Auxquelles il convient d'ajouter la loi de mouvement imposée par le moteur : $\psi = \omega = Cste$.

Il vient donc : $\boxed{x(t) = e.\cos(\omega.t) + R}$ avec $\psi(t=0) = 0$

Soit :
$$\boxed{\begin{aligned} X_{21} &= k.(L - R - L_0 - k.e.\cos(\omega.t)) + m_2.\omega^2.e.\cos(\omega.t) \\ C_m &= e.\sin(\omega.t).(k.(L - R - L_0 - k.e.\cos(\omega.t)) + m_2.\omega^2.e.\cos(\omega.t)) \end{aligned}}$$

4.2 Décollement du poussoir (perte de contact en I).

Il y a décollement du poussoir lorsque l'effort au contact $X_{12}(t)$ s'annule. Cet effort est minimum pour $\psi(t) = \omega.t = \pi$, c'est à dire pour $x = R - e$. Pour que cet effort reste positif, il faut que :

$$X_{21} = k.(L - R - L_0 + e) - m_2.\omega^2.e > 0$$

C'est à dire :
$$\boxed{\omega < \sqrt{\frac{k.(L - L_0 - R + e)}{m_2.e}}}$$

De la même manière, on peut choisir le ressort (rigidité k et pré-charge $k.(L - (R - e) - L_0)$) pour qu'il n'y ait pas décollement pour une vitesse ω donnée.