INSA Lyon 1^{er} cycle - lanière K- Gr 41 à 44 le 3 avril 2008

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

Test n° 3

Exercice 1 /5

Afin de rendre compte de l'aplatissement de la terre aux pôles on la modélise par une sphère homogène de rayon R, de masse M, munie d'un renflement équatorial de masse m uniformément répartie sur le cercle équatorial.

Déterminer les moments d'inertie Cr et Ar de ce renflement équatorial respectivement par rapport :

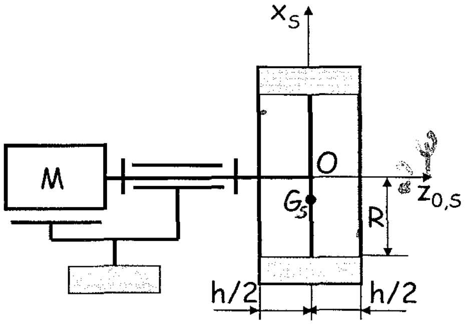
- **à l'axe polaire $(O,\vec{z})$,**
- **à un axe radial du plan équatorial.**

En déduire les moments d'inertie C et A de la terre ainsi modélisée et la valeur de m sachant que cet aplatissement inertiel est rendu par le rapport (C-A)/A = 3,27. 10^{-3}

Exercice 2

On considère une roue S en liaison pivot d'axe $(O,\vec{z}_{0,S})$ par rapport au bâti 0, paramètre de mouvement ψ.

Les caractéristiques géométriques et inertielles, données, de S sont définies sur la figure et par :



Masse : m, centre d'inertie G_S tel que $\overrightarrow{OG_S} = -a\vec{x}_S$,

matrice d'inertie : $\overline{\overline{I}}_O = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ & B & -D \\ & & C \end{pmatrix}_S$

La roue est entraînée par un moteur M qui délivre un torseur couple $C_m\vec{z}_0$

La liaison pivot est parfaite et l'axe $(O,\vec{x}_0)$ est vertical ascendant.

1- Déterminer les actions de liaison de O/S. /7

2- La roue est équilibrée si ces actions sont, en régime permanent ($\dot{\psi} = c^{te} = \omega$, $C_m = C_m^*$), **indépendantes de la vitesse de rotation** ω.

Donner les conditions, portant sur les caractéristiques géométriques et inertielles, pour qu'il en soit ainsi.

3- On se propose de réaliser ces conditions **par adjonction de 2 masses ponctuelles M_1 et M_2 de masse m_1 et m_2 placer sur la jante de la roue** (rayon R), dans chacun des plans de section droite (une masse dans chaque plan). On repère ces masses par les angles ϕ_1 et ϕ_2 à partir de $\vec{x}_S$. /8

Ces masses doivent assurer pour l'ensemble {roue + masselottes} :

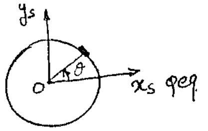
- **l'équilibrage statique : le centre d'inertie G sur l'axe de rotation**
- **l'équilibrage dynamique : l'axe de rotation, axe principal d'inertie.**

Traduire ces conditions et sans résoudre, montrer que ces conditions permettent de solutionner le problème d'équilibrage.

G. Siarras

E1

$$C_r = \int_{\text{Périf}^{ie}} R^2\,dm = R^2 \int_{\text{Périf.}} dm = m R^2$$



$$A_r = \int_{\text{Périf}} (y^2 + z^2)\,dm \qquad \begin{array}{l} y = R\sin\theta \\ dm = \frac{m}{2\pi} d\theta \end{array} \Big| \Rightarrow A_r = \frac{mR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2\theta\, d\theta}_{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$$

$$\boxed{A_r = \frac{mR^2}{2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} C = \frac{2}{5} M R^2 + m R^2 \\ A = \frac{2}{5} M R^2 + \frac{mR^2}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{C-A}{A} = \frac{\frac{mR^2}{2}}{\frac{2}{5}MR^2} = \frac{5}{4}\frac{m}{M} = 3{,}27\cdot10^{-3} \Big| \Rightarrow \boxed{m = \frac{4}{5} M\, 3{,}27\cdot 10^{-3}}$$

Eléments de Correction Test3 av. 08

E2: Equilibrage

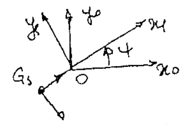
1- Loi fondamentale appliquée à S

① Analyse des actions mécaniques ext.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{P} = -mg\vec{x_0} \quad \text{en } G_s \\ \mathcal{T}_{0/S} \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{0/S} \\ \vec{M}_{0/S}(O) \end{array}\right. \\ \mathcal{T}_{M/S} \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \vec{z_0} \end{array}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{T}_e \left\{ \begin{array}{l} \vec{F_e} = \vec{P} + \vec{F}_{0/S} = \begin{pmatrix} mg\cos\psi + X_{0S} \\ + mg\sin\psi + Y_{0S} \\ Z_{0S} \end{pmatrix}_S \\ \vec{M_e}(O) = \vec{OG_s}\wedge\vec{P} + \vec{M}_{0/S}(O) + C_m\vec{z_0} \end{array}\right.$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} L_{0S} \\ M_{0S} \\ -mga\sin\psi + C_m \end{pmatrix}_S$$

② Cinétique



$$\vec{\Sigma^0} = m\vec{\Gamma}(G_s) \rightarrow ma\begin{pmatrix} +\dot\psi^2 \\ -\ddot\psi \\ 0 \end{pmatrix}_S$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{\delta^0}(O) = \frac{d^0 \vec{\mu^0}(O)}{dt} \\ \vec{\mu^0}(O) = \bar{\bar{I}}_{O,S}\cdot\vec{\Omega_S^0} = \begin{pmatrix} -E\dot\psi \\ -D\dot\psi \\ C\dot\psi \end{pmatrix}_S \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{\delta^0}(O) = \begin{pmatrix} -E\ddot\psi + D\dot\psi^2 \\ -D\ddot\psi - E\dot\psi^2 \\ C\ddot\psi \end{pmatrix}_S$$

D'où :

$$\left.\begin{array}{l} -mg\cos\psi + X_{0S} = +ma\dot\psi^2 \\ +mg\sin\psi + Y_{0S} = -ma\ddot\psi \\ Z_{0S} = 0 \\ L_{0S} = -E\ddot\psi + D\dot\psi^2 \\ M_{0S} = -D\ddot\psi - E\dot\psi^2 \\ -mga\sin\psi + C_m = C\ddot\psi \quad (\text{edm}) \end{array}\right\} \xrightarrow{\dot\psi = \omega = c^{te}} \begin{array}{l} X_{0S}^* = mg\cos\psi + ma\omega^2 \\ Y_{0S}^* = -mg\sin\psi \\ L_{0S}^* = D\omega^2 \\ M_{0S}^* = -E\omega^2 \end{array}$$

2- Equilibrage $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} a = 0 \\ D = E = 0 \end{array}}$

3- Réalisation à l'aide de 2 masselottes $\quad \vec{OM_1} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi_1 \\ R\sin\varphi_1 \\ -h/2 \end{pmatrix}_S \quad \vec{OM_2} = \begin{pmatrix} R\cos\varphi_2 \\ R\sin\varphi_2 \\ h/2 \end{pmatrix}_S$

① Eq. statique : G barycentre de $G_s(m)$, $M_1(m_1)$, $M_2(m_2)$, $\in (O, \vec{z_{0,S}})$

$$\vec{OG} = \frac{1}{m+m_1+m_2}\left(m\vec{OG_s} + m_1\vec{OM_1} + m_2\vec{OM_2}\right) \quad \begin{array}{l} /\vec{x_1} \Rightarrow m_1\cos\varphi_1 + m_2\cos\varphi_2 = m\frac{a}{R} \quad (1) \\ /\vec{y_1} \Rightarrow m_1\sin\varphi_1 + m_2\sin\varphi_2 = 0 \quad (2) \end{array}$$

② Eq. dynamique : $(O, \vec{z_S})$ axe pp^{al} d'inertie $\Rightarrow$

$$E - m_1\frac{h}{2}R\cos\varphi_1 + m_2\frac{h}{2}R\cos\varphi_2 = 0 \quad (3)$$

$$D - m_1\frac{h}{2}R\sin\varphi_1 + m_2\frac{h}{2}R\sin\varphi_2 = 0 \quad (4)$$

③ résolution (pas demandée)

$$\left.\begin{array}{l} (1) \text{ et } (3) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m_1\cos\varphi_1 = \frac{ma}{2R} + \frac{E}{hR} \\ m_2\cos\varphi_2 = \frac{ma}{2R} - \frac{E}{hR} \end{array}\right. \\ (2) \text{ et } (4) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} m_1\sin\varphi_1 = D/hR \\ m_2\sin\varphi_2 = -D/hR \end{array}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \tan\varphi_1 = \frac{D}{E + mah/2}, \quad \tan\varphi_2 = \frac{-D}{-E + \frac{mah}{2}} \\ m_1^2 = \left(\frac{ma}{2R} + \frac{E}{hR}\right)^2 + \frac{D^2}{h^2R^2} \\ m_2^2 = \left(\frac{ma}{2R} - \frac{E}{hR}\right)^2 + \frac{D^2}{h^2R^2} \end{array}}$$