24-05-2006

MISE EN EQUATION D'UN TRIBOMETRE

S_0 est le bâti et R_0 le repère associé est galiléen

S_1 est un ***solide de révolution*** (appelé plateau) animé d'un mouvement de rotation autour de ***l'axe vertical ascendant*** $\overrightarrow{OZ_{0,1}}$

S_2 et S_3 sont deux solides identiques.

S_2 glisse par rapport au plateau S_1 le long d'un guidage G (non représenté sur la figure) d'axe $\overrightarrow{OX_{1,2}}$. Les actions mécaniques exercées sur S_2 par ce guidage sont modélisées par le torseur ci dessous ***dont la forme particulière devra retenir votre attention.***

$$\tau_{G/2} = \begin{cases} \overrightarrow{S_{G/2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ Y_{G/2} \\ 0 \end{bmatrix}_{R1} \\ \overrightarrow{M_{G/2}(G_2)} = \begin{bmatrix} L_{G/2} \\ M_{G/2} \\ N_{G/2} \end{bmatrix}_{R1} \end{cases}$$

Le contact S_1/S_2 , ***qui est toujours maintenu***, obéit au lois de Coulomb (coefficient de frottement f). On admettra que le torseur des actions de contact de S_1 sur S_2 est de la forme :

$$\tau_{1/2} = \begin{cases} \overrightarrow{F_{1/2}} = \begin{bmatrix} X_{1/2} \\ Y_{1/2} \\ Z_{1/2} \end{bmatrix}_{R1} \\ \overrightarrow{M_{1/2}(I_2)} = [0]_{R1} \end{cases}$$

Un ressort ancré sur S_1 exerce sur S_2 une force $\overrightarrow{F_{R/2}} = -k(x_2 - x_0)\overrightarrow{X_2}$; de même un amortisseur exerce sur S_2 une force $\overrightarrow{F_{A/2}} = -bx_2'\overrightarrow{X_2}$

Pour S_3, il suffit de remplacer l'indice 2 par l'indice 3. Le coefficient de frottement a même valeur.

Un moteur , monté sur S_0 exerce sur S_1 un torseur couple : $\overrightarrow{M_{mot/1}} = C_m\overrightarrow{Z_{0,1}}$

* * * * * * * * *

Paramétrage : mouvement 1/0 : $\Psi = \left(\overrightarrow{X_0}, \overrightarrow{X_1}\right)$

mouvement 2/1 : $x_2 = \overrightarrow{O'G_2}.\overrightarrow{X_2}$; $z_2 = \overrightarrow{O'G_2}.\overrightarrow{Z_2}$

mouvement 3/1 : $x_3 = \overrightarrow{O'G_3}.\overrightarrow{X_3}$; $z_3 = \overrightarrow{O'G_3}.\overrightarrow{Z_3}$

Données inertielles :

S_1 : moment d'inertie par rapport à $\overrightarrow{OZ_{0,1}}$: I

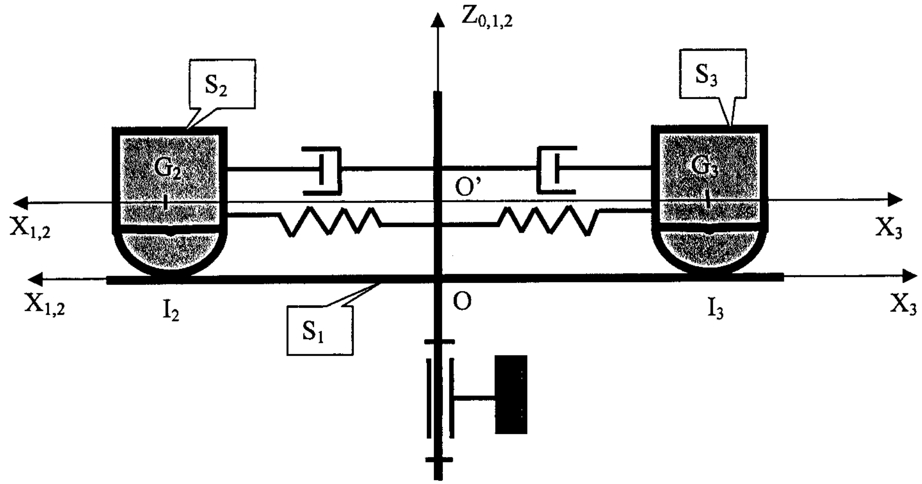
S_2 : centre d'inertie G_2, masse M ; $\overline{\overline{I_{G2}}} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R2}$

Pour S_3, il suffit de remplacer l'indice 2 par l'indice 3.

Nota : on pose $\overrightarrow{X_1} = \overrightarrow{X_2} = -\overrightarrow{X_3}$

QUESTIONS

1) traduire le contact en I_2 et en I_3
2) Ecrire un bilan total précis des inconnues et des équations
3) Indiquer le système minimum permettant d'obtenir les équations du mouvement : on énoncera très précisément chaque équations et leurs origines.
4) Ecrire les équations de mouvement
5) Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à $S_1 \cup S_2 \cup S_3$
6) Soit le régime stationnaire suivant : $\Psi' = cste = \omega$ et $x_i = cste = x_i^*$ i=2,3 déterminer la valeur du couple moteur et montrer que connaissant k et M, une mesure de ω et x_i^* permet d'accéder à f.



O' et O sont des points fixes de S_1 : O'O = h

INSA LYON

24-05-2006

MISE EN EQUATION D'UN TRIBOMETRE

S_0 est le bâti et R_0 le repère associé est galiléen

S_1 est un ***solide de révolution*** (appelé plateau) animé d'un mouvement de rotation autour de ***l'axe vertical ascendant*** $\overrightarrow{OZ_{0,1}}$

S_2 et S_3 sont deux solides identiques.

S_2 glisse par rapport au plateau S_1 le long d'un guidage G (non représenté sur la figure) d'axe $\overrightarrow{OX_{1,2}}$. Les actions mécaniques exercées sur S_2 par ce guidage sont modélisées par le torseur ci dessous ***dont la forme particulière devra retenir votre attention***.

$$\tau_{G/2} = \begin{cases} \overrightarrow{S_{G/2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ Y_{G/2} \\ 0 \end{bmatrix}_{R1} \\ \overrightarrow{M_{G/2}(G_2)} = \begin{bmatrix} L_{G/2} \\ M_{G/2} \\ N_{G/2} \end{bmatrix}_{R1} \end{cases}$$

Le contact S_1/S_2 , ***qui est toujours maintenu***, obéit au lois de Coulomb (coefficient de frottement f). On admettra que le torseur des actions de contact de S_1 sur S_2 est de la forme :

$$\tau_{1/2} = \begin{cases} \overrightarrow{F_{1/2}} = \begin{bmatrix} X_{1/2} \\ Y_{1/2} \\ Z_{1/2} \end{bmatrix}_{R1} \\ \overrightarrow{M_{1/2}(I_2)} = [0]_{R1} \end{cases}$$

Un ressort ancré sur S_1 exerce sur S_2 une force $\overrightarrow{F_{R/2}} = -k(x_2 - x_0)\overrightarrow{X_2}$; de même un amortisseur exerce sur S_2 une force $\overrightarrow{F_{A/2}} = -b x_2^{'} \overrightarrow{X_2}$

Pour S_3, il suffit de remplacer l'indice 2 par l'indice 3. Le coefficient de frottement a même valeur.

Un moteur , monté sur S_0 exerce sur S_1 un torseur couple : $\overrightarrow{M_{mot/1}} = C_m \overrightarrow{Z_{0,1}}$

*   *   *   *   *   *   *   *   *

Paramétrage : mouvement 1/0 : $\Psi = \left(\overrightarrow{X_0}, \overrightarrow{X_1}\right)$

mouvement 2/1 : $x_2 = \overrightarrow{O'G_2}.\overrightarrow{X_2}$; $z_2 = \overrightarrow{O'G_2}.\overrightarrow{Z_2}$

mouvement 3/1 : $x_3 = \overrightarrow{O'G_3}.\overrightarrow{X_3}$; $z_3 = \overrightarrow{O'G_3}.\overrightarrow{Z_3}$

Données inertielles :

S_1 : moment d'inertie par rapport à $\overrightarrow{OZ_{0,1}} : I$

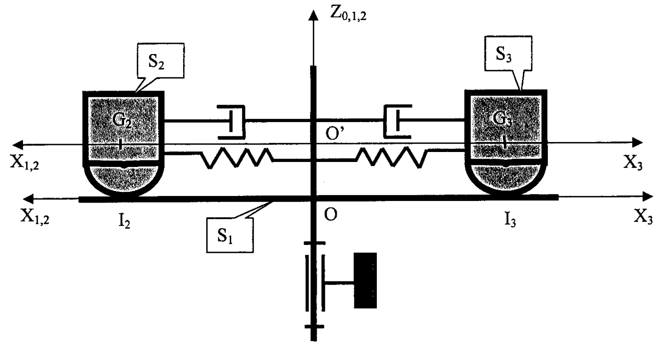
S_2 : centre d'inertie G_2, masse M ; $\overline{\overline{I_{G2}}} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R2}$

Pour S_3, il suffit de remplacer l'indice 2 par l'indice 3.

Nota : on pose $\overrightarrow{X_1} = \overrightarrow{X_2} = -\overrightarrow{X_3}$

QUESTIONS

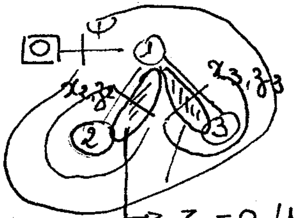
1) traduire le contact en I_2 et en I_3
2) Ecrire un bilan total précis des inconnues et des équations
3) Indiquer le système minimum permettant d'obtenir les équations du mouvement : on énoncera très précisément chaque équations et leurs origines.
4) Ecrire les équations de mouvement
5) Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à $S_1 \cup S_2 \cup S_3$
6) Soit le régime stationnaire suivant : $\Psi' = cste = \omega$ et $x_i = cste = x_i^*$ i=2,3 déterminer la valeur du couple moteur et montrer que connaissant k et M, une mesure de ω et x_i^* permet d'accéder à f.



O' et O sont des points fixes de S_1 : O'O = h

Eléments de correction. lecture 4 24/05/06.

1. Etude cinématique → edl?



$x_2 = \vec{O'G_2} \cdot \vec{x}_{2,1}$ $\qquad$ $x_3 = \vec{O'G_3} \cdot \vec{x}_3$

$z_2 = \vec{O'G_2} \cdot \vec{z}_{1,2}$ $\qquad$ $z_3 = \vec{O'G_3} \cdot \vec{z}_{1,3}$

→ $z_2 = 0$ (1)

→ $z_3 = 0$ (2)

⇒ $ddl = 5 - 2 = 3$

2. Etude dynamique → edm?

2-1 Analyse prévisionnelle qd $\mathcal{P}$ y a glisst

* $l_{p2\text{-}1}$ → liaison ponctuelle entretenue

• $\Sigma = 1 + 2 + 3$

• Système minimum

inc		éq.	
cin →	5	de liaison →	2
de liaison		TSD à 2 / $\vec{x}_2$ / $\vec{z}_2$ →	2
$l^*_{p2\text{-}1}$ →	3	TSD à 3 / $\vec{x}_3$ / $\vec{z}_3$ →	2
$l_{p3\text{-}1}$ →	3	TMD à $\Sigma/(O, \vec{z}_1)$ →	1 → edm
		$(\ell de)_{lp2\text{-}1}$ →	2
		$(\ell de)_{lp3\text{-}1}$ →	2
	11		11

⇒ 3 edm ⇐

pb isodyn.

. Analyse globale

inc		ep	
cin →	5	de liaison →	2
de liaison		T.G	
l_{O1} →	5	3×6 →	18
$l_{G\text{-}2}$ →	4		
$l_{p2\text{-}1}$ →	3	$(\ell de)_{lp2\text{-}1}$ →	2
$l_{G\text{-}3}$ →	4		
$l_{p3\text{-}1}$ →	3	$(\ell de)_{lp3\text{-}1}$ →	2
	24		24

2.2 TSD à 2.

$\vec{F_e} \cdot \vec{x}_2 = \vec{\Sigma}^0 \cdot \vec{x}_2$ ⇒ $m(\ddot{x}_2 - x_2\dot{\varphi}^2) = -k(x_2 - x_0) - b\dot{x}_2 + X_{12}$ (3)

$\vec{F_e} \cdot \vec{z}_2 = \vec{\Sigma}^0 \cdot \vec{z}_2$ ⇒ $Z_{12} - mg = 0$ (4)

① a.a.m.e.

action	$\vec{F} \cdot \vec{x}_{2,1}$	$\vec{F} \cdot \vec{z}_{2,1}$
$\vec{P}_2 = -mg\vec{z}_{0,1}$		$-mg$
$\mathcal{F}_{G/2}$	0	0
$\mathcal{F}_{P1/2}$	X_{12}	Z_{12}
$\mathcal{F}_{R/2}$	$-k(x_2 - x_0)$	
$\mathcal{F}_{A/2}$	$-b\dot{x}_2$	

$\vec{F_e} \cdot \vec{x}_2 = -k(x_2 - x_0) - b\dot{x}_2 + X_{12}$

$\vec{F_e} \cdot \vec{z}_2 = -mg + Z_{12}$

② cinétique

$\vec{\Sigma}^0 = m\vec{J}^0(G_2)$

$$\vec{J}^0(G_2) = \underbrace{\vec{J}^1(G_2)}_{\ddot{x}_2\vec{x}_{2,1}} + \underbrace{\vec{J}^0_1(G_2)}_{x_2\ddot{\varphi}\vec{y}_{1,2} \; x_2\dot{\varphi}^2\vec{x}_{1,2}} + \underbrace{2\vec{\Omega}^0_1 \wedge \vec{V}^1(G_2)}_{2\dot{\varphi}\vec{z}_1 \wedge \dot{x}_2\vec{x}_{1,2} = 2\dot{x}_2\dot{\varphi}\vec{y}_{1,2}}$$

4. t.e.c $\quad \mathcal{P}^0 = dT^0/dt$

① $\mathcal{P}^0 = \mathcal{P}^0_{P} + \mathcal{P}^0_{m} + \mathcal{P}^0_{O/1} + \mathcal{P}_R + \mathcal{P}_A + \cancel{\mathcal{P}_{G1\text{-}2}} + \cancel{\mathcal{P}_{G1\text{-}3}} + \mathcal{P}_{p1\text{-}2} + \mathcal{P}_{p}$

$= C_m\dot{\varphi} - k(x_2 - x_0)\dot{x}_2 - k(x_3 - x_0)\dot{x}_3 - b\dot{x}_2^2 - b\dot{x}_3^2 + X_{12}\dot{x}_2 + X_{13}\dot{x}_3$

avec $X_{12} = -\varepsilon mgf$, $X_{13} = -\varepsilon' mgf$

② $T^0 = (T^0)_1 + (T^0)_2 + (T^0)_3$

$= \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\left[C\dot{\varphi}^2 + m(\dot{x}_2^2 + x_2^2\dot{\varphi}^2)\right] \times 2$

$= \frac{1}{2}\left[(I + 2C + 2m x_2^2)\dot{\varphi}^2 + 2m\dot{x}_2^2\right]$

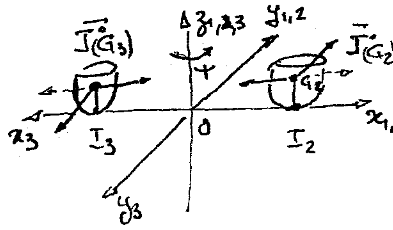
$\frac{dT^0}{dt} = (I + 2C + 2m x_2^2)\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + 2m x_2\dot{x}_2\dot{\varphi}^2 + 2m\dot{x}_2\ddot{x}_2$

2.3 TSD à 3

Les calculs effectués de la barre 3 donnent les mêmes résultats

$$m(\ddot{x}_3 - x_3\dot{\varphi}^2) = -k(x_3-x_0) - b\dot{x}_3 + X_{13} \quad (5)$$

$$Z_{13} - mg = 0 \quad (6)$$



2.4 TMD à $\Sigma/(O,\vec{z}_{1,2,3})$

$$\vec{M}_e(O)\cdot\vec{z}_1 = \vec{\delta}^\circ(O)\cdot\vec{z}_1 \Rightarrow \boxed{C_m = [I+2C+m(x_2^2+x_3^2)]\ddot{\varphi} + m\dot{\varphi}(x_2\dot{x}_2+x_3\dot{x}_3) \quad (7)}$$

edm

① C_m

② $\vec{\delta}^\circ(O) = (\vec{\delta}^\circ(O))_1 + (\vec{\delta}^\circ(O))_2 + (\vec{\delta}^\circ(O))_3$

$(\vec{\delta}^\circ(O))_1\cdot\vec{z}_{1,0} = I\ddot{\varphi}$ solide en rotation / axe fixe

$$(\vec{\delta}^\circ(O))_2 = \vec{\delta}^\circ(G_2) + \vec{OG_2}\wedge m\vec{J}(G_2)$$

$$C\ddot{\varphi}\vec{z}_{0,1,2} \qquad x_2\vec{x}_2\wedge m\begin{pmatrix}\ddot{x}_2-x_2\dot{\varphi}^2\\ x_2\ddot{\varphi}+2\dot{x}_2\dot{\varphi}\\ 0\end{pmatrix}_2$$

$$(\vec{\delta}^\circ(O))_2\cdot\vec{z}_2 = C\ddot{\varphi} + m x_2(x_2\ddot{\varphi}+2\dot{x}_2\dot{\varphi}_2)$$

$$(\vec{\delta}^\circ(O))_3\cdot\vec{z}_3 = C\ddot{\varphi} + m x_3(x_3\ddot{\varphi}+2\dot{x}_3\dot{\varphi}_3)$$

2.5 ldc de $l_{p\,1\text{-}2}$

$$\vec{F}_{1/2} = \begin{pmatrix}X_{12}\\ Y_{12}\\ Z_{12}\end{pmatrix}_{1,2} \quad \vec{T}_{1/2},\ \vec{N}_{1/2} \quad \text{avec } Z_{12}>0$$

ldc : $\vec{T}_{1/2} = -f\|\vec{N}_{1/2}\|\dfrac{\vec{V_2^1}(I_2)}{V}$

$\vec{V_2^1}(I_2) = \dot{x}_2\vec{x}_{1,2} \Rightarrow \dfrac{\vec{V_2^1}(I_2)}{V} = \varepsilon\vec{x}_1$, $\varepsilon = \begin{cases}1 & \text{si } \dot{x}_2>0\\ -1 & <0\end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} X_{12} = -\varepsilon f Z_{12} & (8)\\ Y_{12} = 0 & (9)\end{cases}$$

2.6 ldc de $l_{p\,1\text{-}3}$

de même $\begin{cases} X_{13} = -\varepsilon' f Z_{13} & (10)\\ Y_{13} = 0 & (11)\end{cases}$ $\quad \varepsilon' = \begin{cases}1 & \text{si } \dot{x}_3>0\\ -1 & <\end{cases}$

2.7 edm.

- (7) → (a)
- on élimine X_{12} entre (3), (8) et (4) ⇒ $m\ddot{x}_2+b\dot{x}_2+k(x_2-x_0)+mx_2\dot{\varphi}^2 = -\varepsilon mgf$ (b)
- — X_{13} — (5), (10) et 6 ⇒ $m\ddot{x}_3+b\dot{x}_3+k(x_3-x_0)+mx_3\dot{\varphi}^2 = -\varepsilon' mgf$ (c)

3. Résolution : état stationnaire $\dot{\varphi} = \text{cte} = \omega$, $x_2^* = x_3^* = x^*$ ⇒ il n'y a plus de glisst
on ne peut donc plus appliquer les lois de Coulomb ! alors $|X_{12}| < mgf$

(a) ⇒ $C_m^* = 0$

Si la vitesse de rotation de 1/0 part de 0 à ω et ne fluctue pas, on peut admettre que $X_{12}^* = -mgf$ ($\dot{x}_2>0$ dès la phase de glisst) passage à la limite, limite !

donc (b) = (c) ⇒ $f = \frac{1}{g}[x^*\omega^2 - k(x^*-x_0)]$

Par contre si la vitesse de rotation diminue de telle sorte que $m\omega^2x^*$ diminue d'une quantité $< mgf$ l'équilibre relatif dans la position x^* est toujours possible.

Donc la mesure de f n'est pas fiable. C'est un tribomètre bien mal nommé !