

## Devoir de Synthèse de Physique

18 Janvier 2005

Durée : 3h

*Barème approximatif : I : 10 points ; II : 10 points.  
Seules les calculatrices non programmables sont autorisées.*

### Tri des matériaux

On s'intéresse à la possibilité de trier les matériaux en utilisant leurs propriétés magnétiques. Les matériaux sont placés à l'aide d'un tapis roulant dans l'entrefer d'un électro-aimant. Pour simplifier les analyses, on s'intéressera dans la première partie uniquement aux phénomènes liés aux forces magnétiques consécutives à l'aimantation des matériaux. Dans la deuxième partie, on analysera uniquement les effets liés aux courants de Foucault.

#### I - Tri des matériaux par action des forces d'aimantation

##### I.1 Champ magnétique dans un tore coupé par un entrefer

On considère (Figure 1) un anneau torique, d'axe de révolution  $\Delta$ , de rayon moyen  $R$ , dont la section droite est un carré de côté  $a$ . Ce tore en matériau magnétique est coupé par un entrefer d'air, d'angle dièdre  $\alpha$ , et porte un enroulement de  $N$  spires régulièrement réparties et parcourues par un courant constant d'intensité  $I$ . On peut admettre que les vecteurs excitation et champ magnétiques sont colinéaires aussi bien dans le tore que dans l'entrefer, et que, même en présence de l'entrefer, dont l'angle  $\alpha$  exprimé en radians est petit devant  $2\pi$ , les lignes de champ restent circulaires. Les fuites magnétiques sont alors négligeables. La perméabilité relative de l'air sera prise égale à 1. On notera  $B_a$  et  $H_a$  les normes du champ magnétique et de l'excitation dans l'air et  $B_m$  et  $H_m$  ces mêmes grandeurs dans le milieu magnétique.

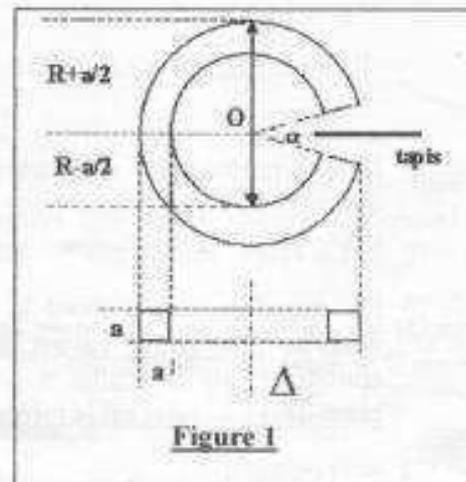


Figure 1

- On suppose dans un premier temps que le tore de perméabilité magnétique relative  $\mu_r$  ne présente pas d'entrefer. Déterminer les normes de l'excitation et du champ créés par le tore à la distance  $r$  de l'axe  $\Delta$ .
- On suppose maintenant que le tore est coupé par l'entrefer d'angle dièdre  $\alpha$ . Déterminer  $B_a$ ,  $H_a$ ,  $B_m$  et  $H_m$  à la distance  $r$  de l'axe  $\Delta$ .
- Que deviennent ces expressions dans le cas où  $\mu_r \gg 1$ ? Déterminer alors les valeurs numériques limites  $B_{a1}$  et  $B_{a2}$  de  $B_a$  dans l'entrefer aux distances  $r_1 = R - a/2$  et  $r_2 = R + a/2$ . On donne  $R = 0,4 \text{ m}$ ,  $N = 1000$  spires,  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $\alpha = 3^\circ$ ,  $I = 10 \text{ A}$ ,  $\mu_r = 3500$ ,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ [SI]}$ .

## I.2 Aimantation d'un disque dans l'entrefer de l'électro-aimant et action des forces magnétiques

On veut évaluer l'action des forces magnétiques sur un petit disque matériel de volume  $\Delta\tau$ . Un tapis roulant (en matériau non magnétique) déplace à la vitesse  $V$  les objets à trier dans la zone de l'entrefer. Le plan de ce tapis est le plan bissecteur de l'angle dièdre.

On rappelle que la résultante  $F$  des forces magnétiques s'exerçant sur une boucle de courant de moment magnétique  $m$  placée dans un champ extérieur  $B$  est égale à  $F = \text{grad}(m \cdot B)$ .

On utilise comme repère un référentiel cylindrique d'origine  $O$  (centre du tore), l'axe  $Oz$  étant perpendiculaire à l'axe  $(\Delta)$  du tore (Figure 2a), le tapis étant situé dans le plan  $z = 0$ . La position d'un objet  $i$ , supposé de petites dimensions, est repérée par le vecteur  $OM_i = r_i \mathbf{u}_r$  (figure 2b).

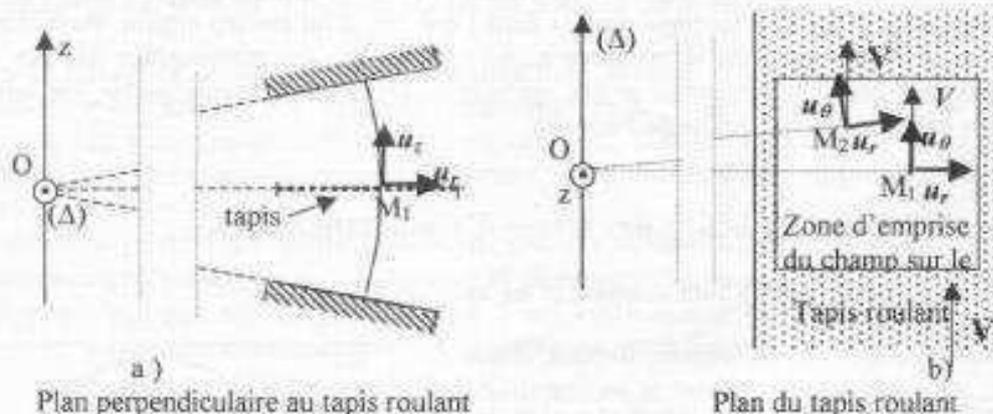


Figure 2

- a) Dans le repère défini ci-dessus et en l'absence d'objets sur le tapis, donner l'expression et la direction du champ magnétique  $B$  existant dans l'entrefer pour un point situé dans le plan du tapis.
- b) On considère tout d'abord le cas d'un petit disque de volume  $\Delta\tau$  placé sur le tapis, en matériau magnétique parfait de susceptibilité magnétique  $\chi_d \ll 1$ . Dans ce cas, on peut considérer que le champ magnétique existant dans ce petit élément matériel magnétique placé dans l'entrefer est le même que le champ magnétique  $B$  préexistant dans cet entrefer.

- Donner alors, en tenant compte de ces approximations, la relation entre l'aimantation induite  $M$  prise par ce matériau et le champ magnétique  $B$ .

- Montrer que la résultante  $\Delta F$  de ces forces s'exprime par  $\Delta F = -K \chi_d \frac{\Delta\tau}{r} \mathbf{u}_r$  où  $K$  est une constante positive que l'on exprimera en fonction de  $\mu_0$ ,  $\mu_r$ ,  $\alpha$ ,  $N$  et  $I$  et que l'on calculera numériquement.

N.B. On rappelle que, en coordonnées cylindriques,  $\text{grad}U = \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{u}_z$ .

- En déduire comment tend à se déplacer un matériau diamagnétique placé dans l'entrefer. Même question pour un matériau paramagnétique.

- c) On considère maintenant le cas d'un petit disque de volume  $\Delta\tau$  en matériau ferromagnétique placé sur le tapis dans l'entrefer. On admettra que son aimantation est donnée par

$$M = \frac{\chi_d B}{1 + \frac{\chi_d \mu_0}{3}}$$

Que devient la résultante des forces  $\Delta F$  pour ce matériau? En déduire comment tend à se déplacer un matériau ferromagnétique placé dans l'entrefer.

- d) Si le disque matériel de masse volumique  $\rho$  se déplace sur le tapis, il est soumis au cours de son déplacement à une force résistante de frottement dont la norme est égale à  $F_{\text{frot}} = \beta mg$  où  $m$  est la masse du disque,  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $\beta$  une constante égale à  $10^{-2}$ . Pour  $r = R$ , exprimer le rapport entre la force magnétique et la force de frottement pour les différents types de matériaux. En utilisant les données du tableau I, évaluer numériquement le rapport  $\frac{1}{K} \frac{\Delta F}{F_{\text{frot}}}$  pour les différents matériaux. On prendra  $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$ . Expliquer alors quel type de tri de matériaux on pourrait réaliser sur un tel principe.

Matériau	Cuivre	Aluminium	Fer	Polymère conducteur	Polyamide isolant
Conductivité $\gamma$ ( $\text{S.m}^{-1}$ )	$6,4 \cdot 10^7$	$4,1 \cdot 10^7$	$1,1 \cdot 10^7$	$2,5 \cdot 10^4$	$1,0 \cdot 10^{-11}$
Masse volumique $\rho$ ( $\text{kg.m}^{-3}$ )	$8,9 \cdot 10^3$	$2,7 \cdot 10^3$	$7,9 \cdot 10^3$	$1,1 \cdot 10^3$	$1,1 \cdot 10^3$
Susceptibilité magnétique $\chi_d$	$-9,4 \cdot 10^{-6}$	$+2,1 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^4$	$-4,0 \cdot 10^{-7}$	$-4,0 \cdot 10^{-7}$

Tableau I

## II - Tri des matériaux par courants de Foucault

Dans le cas des ordures ménagères, on utilise les courants de Foucault pour extraire les matériaux conducteurs (principalement les métaux) des autres (plastiques, matière organique). Le dispositif appelé séparateur est constitué d'un tapis roulant qui déplace les objets à trier dans une zone de champ magnétique variable (Figure 3).

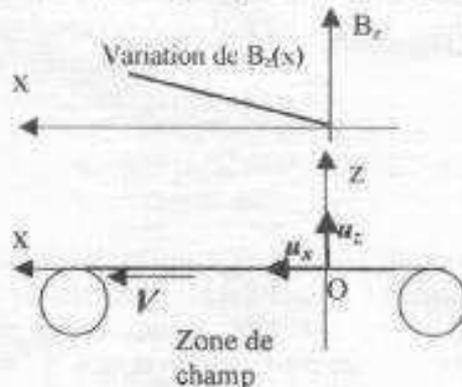


Figure 3

On utilise comme repère un référentiel  $(O, x, y, z)$  dont l'axe  $Ox$  est parallèle au tapis et l'axe  $Oz$  vertical, perpendiculaire au tapis. Les objets pénètrent dans une zone où règne un champ magnétique  $B$  non uniforme caractérisé par une composante verticale  $B_z$  qui croît linéairement avec  $x$ , selon la relation:

$$B_z = \frac{B_0}{x_0} x \quad (B_0 \text{ et } x_0 \text{ constantes}).$$

### 1- Question préliminaire

Quelle est la valeur de  $\text{rot } B$  dans l'espace entourant les objets, où ne peut circuler aucun courant ?

Montrer que cette condition ne peut être satisfaite que si  $B$  possède une composante supplémentaire  $B_x$  suivant  $u_x$  dont on donnera la forme générale. On supposera par la suite que  $B_x = 0$  pour  $z = 0$ .

On rappelle que  $\text{rot } B = \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) u_x + \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) u_y + \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) u_z$ .

2- Une spire métallique circulaire de rayon  $a$ , de résistance ohmique  $R_0$  et d'auto-inductance  $L$ , est posée à plat sur le tapis roulant placé à la cote  $z = 0$  et qui se déplace à la vitesse  $V = V\mathbf{u}_x$ . Décrire qualitativement les phénomènes physiques qui se produisent lorsque cette spire est dans la zone de champ.

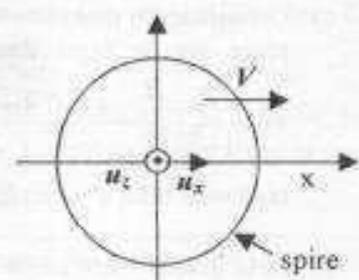


Figure 4

3- On raisonne dans le référentiel fixe et on suppose que toute la surface de la spire est rentrée dans la zone. A l'instant  $t$ , le centre  $C$  de la spire se trouve à l'abscisse  $x_C = Vt$ .

3-1 Sans effectuer de calcul intégral complet, montrer, en justifiant soigneusement vos affirmations, que le flux  $\Phi$  de  $\mathbf{B}$  à travers la spire orientée par la normale  $\mathbf{u}_z$  peut s'exprimer simplement par  $\Phi = \pi a^2 B_z(x_C)$ , où  $B_z(x_C)$  est la valeur de  $B_z$  au centre de la spire.

3-2 En déduire l'équation différentielle régissant le courant  $i$  qui circule dans la spire. On considérera  $i$  comme une grandeur algébrique en orientant la spire dans le sens positif compatible avec l'orientation de la normale  $\mathbf{u}_z$  au plan de la spire. (Indiquer ce sens en reportant sur votre copie la figure 4). Donner l'expression de  $i(t)$  en supposant qu'à  $t = 0$ ,  $i = 0$ .

3-3 L'intensité valant  $i$  à l'instant  $t$ , montrer, par des considérations de symétrie sur les forces élémentaires s'exerçant sur des éléments  $dl$  de spire convenablement choisis, que la force de Laplace s'exerçant sur la spire se réduit à une force unique dont on précisera la direction. Justifier soigneusement votre réponse en complétant votre figure 4 reportée.

3-4 On suppose que  $i = I_0$  (régime forcé) déterminé à la question 3-2. Calculer la force résultante et montrer qu'elle s'écrit  $F = \frac{k}{R_0} V$ , où  $k$  est une constante que l'on déterminera en fonction de  $B_0$ ,  $x_0$ , et  $a$ . Son signe était-il prévisible ?

x 3-5 La spire est en fait un anneau de petite section droite  $S$  ; il est constitué d'un matériau de conductivité  $\gamma$  et de masse volumique  $\rho$ . Montrer qu'en l'absence de frottements, l'accélération initiale que subit l'anneau peut s'écrire  $-a^2(dB_z/dx)^2 f V$  où  $f$  est une fonction des seules caractéristiques du matériau.

3-6 Les questions précédentes permettent d'identifier les caractéristiques du matériau intervenant dans l'expression de la force de Laplace. Un tri des matériaux avec un système aussi simple n'est cependant pas possible. Expliquer pourquoi.

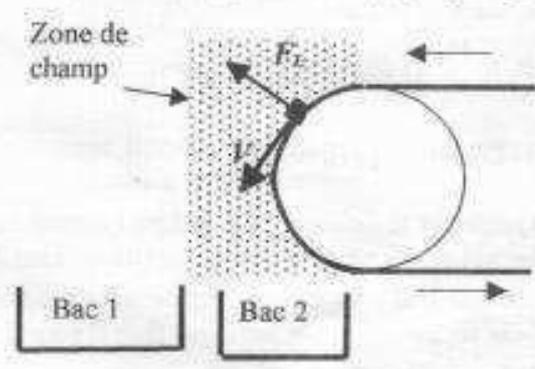


Figure 5

Dans la configuration réelle, le séparateur est placé à l'extrémité du tapis roulant, là où le tapis tourne de  $180^\circ$  autour d'une poulie (Figure 5). On peut considérer que, à l'entrée dans la zone de champ, la vitesse  $V$  des corps entraînés reste celle du tapis et est donc orthoradiale. Par suite de la configuration plus complexe du champ magnétique régnant dans cette zone que celle étudiée précédemment, la force de Laplace  $F_L$  est radiale, dirigée vers l'extérieur. On admettra que l'accélération radiale reste de la forme  $a^2(dB_z/dx)^2 f V$ .

**CORRIGE – BAREME**  
**du DS du 17 janvier 2005**

**Tri des Matériaux**

**I – Tri par action des forces d'aimantation : 20 points**

I.1	Champ magnétique dans un tore coupé par un entrefer	
1.1a	Théorème ampère : Contour = cercle de rayon r d'axe Δ à z=constante $\oint \vec{H}_m \cdot d\vec{\lambda} = \sum I_{enlacés} \Rightarrow H_m = \frac{Ni}{2\pi r}$ $\Rightarrow B_m = \mu_0 \mu_r H_m = \mu_r \mu_0 \frac{Ni}{2\pi r}$	1 0,5
1.1b	Fuites magnétiques négligeables : conservation du flux de B : $\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_a S = B_m S \text{ d'où } B_a = B_m$ $B_m = \mu_0 \mu_r H_m \text{ et } B_a = \mu_0 H_a \Rightarrow H_a = \mu_r H_m$ Pas de modification de lignes de champ introduite par l'entrefer soit $\oint \vec{H}_m \cdot d\vec{\lambda} = r \alpha H_a + (2\pi - \alpha) r H_m = NI$ $\Rightarrow r H_m = \frac{Ni}{2\pi r + \alpha r (\mu_r - 1)} \text{ et } H_a = \frac{\mu_r Ni}{2\pi r + \alpha r (\mu_r - 1)}$ $\Rightarrow r B_m = B_a = \frac{\mu_0 \mu_r Ni}{2\pi r + \alpha r (\mu_r - 1)}$	0,5 0,5 1 0,5 0,5
1.1c	Si $\mu_r$ très supérieur à 1 $\Rightarrow B_m = B_a = \frac{\mu_0 \mu_r Ni}{r(2\pi + \alpha \mu_r)} \text{ et } H_a = \frac{\mu_r Ni}{r(2\pi + \alpha \mu_r)} \text{ et } H_m = \frac{Ni}{r(2\pi + \alpha \mu_r)}$ A.N. : $r_1 = 0,37\text{m}$ $B_{a1} = 0,63 \text{ T}$ $r_2 = 0,43\text{m}$ $B_{a2} = 0,54 \text{ T}$ <u>Remarque :</u> <i>Certains étudiants ont aussi négligé le <math>2\pi</math> devant <math>\alpha \mu_r</math>. Accepter et mettre quand même tous les points. Dans ce cas, ils aboutissent à :</i> $\Rightarrow B_m = B_a = \frac{\mu_0 Ni}{r \alpha} \text{ et } H_a = \frac{Ni}{r \alpha} \text{ et } H_m = \frac{Ni}{r \alpha \mu_r}$ <i>et aux valeurs numériques : <math>B_{a1} = 0,65 \text{ T}</math> et <math>B_{a2} = 0,56 \text{ T}</math></i>	1 0,5 0,5
I.2	Aimantation d'un disque dans l'entrefer de l'électro-aimant et action des forces magnétiques	
1.2a	$\vec{B} = \vec{B}_a = B_a \vec{e}_z$	0,5
1.2b	$\vec{M} = \chi_d \vec{H}$ $\vec{H} = \frac{\vec{B}_a}{\mu_0 (1 + \chi_d)}$ (mettre 0/0,5 si ils utilisent $\mu_r$ ) Avec $\chi_d \ll 1$ $\vec{M} = \chi_d \frac{\vec{B}_a}{\mu_0}$	0,5 0,5 0,5
	Dans le cas d'un petit volume $\Delta\tau$ : $\vec{\Delta F} = \text{grad}(\Delta m \cdot B_a)$ avec $\vec{\Delta m} = \vec{M} \Delta\tau$	0,5

1,5

3

2

0,5

1,5

	$\overline{\Delta F} = \overline{\text{grad}(\overline{\Delta m} \cdot \overline{B_a})} = \overline{\text{grad}(M \Delta \tau \cdot \overline{B_a})} = \frac{\Delta \tau \cdot \chi_d}{\mu_0} \overline{\text{grad}(B_a^2)}$	mettre 1,5/1,5 si cohérent	1																		
	$B_a^2 = \left( \frac{\mu_0 \mu_r N I}{2\pi + \alpha \mu_r} \right)^2 \cdot \frac{1}{r^2} \Rightarrow \overline{\text{grad}(B_a^2)} = \left[ \frac{\mu_0 \mu_r N i}{(2\pi + \alpha \mu_r)} \right]^2 \cdot \frac{2}{r^3} \overline{u_r}$	avec expression de B du I.1	0,5																		
	<p>D'où en posant <math>\overline{\Delta F} = -K \frac{\Delta \tau \cdot \chi_d}{r^3} \overline{u_r}</math>    <math>K = \frac{2}{\mu_0} \left[ \frac{\mu_0 \mu_r N i}{(2\pi + \alpha \mu_r)} \right]^2</math></p>		0,5																		
	<p>A.N. : <math>K = 85696 \approx 8,5 \times 10^4</math> N</p> <p>Exiger expression <math>\Delta F</math> et valeur numérique exactes. Ne pas mettre les points (0,5 + 0,5) même si cohérent avec avant</p>		0,5																		
	<p>Diamagnétique <math>\chi_d</math> négatif, déplacement dans sens <math>+\mathbf{u}_r</math>,  Paramagnétique <math>\chi_d</math> positif, sens opposé</p> <p>Mettre les points si raisonnement sur <math>\chi_d</math> cohérent (même si valeur de K fausse)</p>		1 1																		
I.2c	<p>Pour un matériau ferro, il suffit de remplacer dans l'expression de <math>\Delta F</math>,</p> $\chi_d \text{ par } \frac{\chi_d}{(1 + \frac{\chi_d}{3})} \quad \text{Soit } \overline{\Delta F} = -K \frac{\Delta \tau \cdot \chi_d}{(1 + \frac{\chi_d}{3}) r^3} \overline{u_r}$		0,5																		
	<p>Mettre 0,5 si les étudiants ont pris <math>M = \frac{\chi_d B}{1 + \frac{\chi_d \mu_0}{3}}</math>, la formule dans l'énoncé n'était pas nette</p> <p>Déplacement dans sens <math>-\mathbf{u}_r</math>.</p>		0,5																		
d)	<p><math>F_{\text{frot}}</math> est en sens inverse de <math>\Delta F</math>. On évalue le rapport des modules (pas nécessaire de tenir compte du signe).</p> <p>Pour les matériaux dia et paramagnétiques <math>\frac{1}{K} \frac{\Delta F}{F_{\text{frot}}} = \frac{\chi_d \frac{\Delta \tau}{R^3}}{\beta \cdot \Delta \tau \cdot \rho \cdot g} = \frac{\chi_d}{\beta \cdot \rho \cdot g \cdot R^3}</math></p> <p>Soit <math>\frac{1}{K} \frac{\Delta F}{F_{\text{frot}}} = 156 \cdot \frac{\chi_d}{\rho}</math>    soit <math>\frac{\Delta F}{F_{\text{frot}}} \approx 1,34 \cdot 10^7 \frac{\chi_d}{\rho}</math></p> <p>pour le fer <math>\frac{1}{K} \frac{\Delta F}{F_{\text{frot}}} = \frac{\left( \frac{\chi_d}{1 + \frac{\chi_d}{3}} \right) \frac{\Delta \tau}{R^3}}{\beta \cdot \Delta \tau \cdot \rho \cdot g} = \frac{\chi_d}{\left( 1 + \frac{\chi_d}{3} \right) \beta \cdot \rho \cdot g \cdot R^3}</math></p> <p><math>\frac{1}{K} \frac{\Delta F}{F_{\text{frot}}} = 156 \cdot \frac{\chi_d}{\left( 1 + \frac{\chi_d}{3} \right) \rho} \approx \frac{3 \times 156}{\rho} \approx \frac{468}{\rho}</math></p>		1 non noté 1 non noté																		
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Matériau</th> <th>Cuivre</th> <th>Aluminium</th> <th>Fer</th> <th>Polymère conducteur</th> <th>Polyamide isolant</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\frac{1}{K} \frac{\Delta F}{F_{\text{frot}}}</math></td> <td><math>1,6 \cdot 10^{-7}</math></td> <td><math>1,2 \cdot 10^{-6}</math></td> <td><math>6 \cdot 10^{-2}</math></td> <td><math>5,7 \cdot 10^{-8}</math></td> <td><math>5,7 \cdot 10^{-8}</math></td> </tr> <tr> <td><math>\frac{\Delta F}{F_{\text{frot}}}</math></td> <td><math>1,4 \cdot 10^{-2}</math></td> <td><math>1 \cdot 10^{-1}</math></td> <td><math>5 \cdot 10^3</math></td> <td><math>4,8 \cdot 10^{-3}</math></td> <td><math>4,8 \cdot 10^{-3}</math></td> </tr> </tbody> </table>	Matériau	Cuivre	Aluminium	Fer	Polymère conducteur	Polyamide isolant	$\frac{1}{K} \frac{\Delta F}{F_{\text{frot}}}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-2}$	$5,7 \cdot 10^{-8}$	$5,7 \cdot 10^{-8}$	$\frac{\Delta F}{F_{\text{frot}}}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^3$	$4,8 \cdot 10^{-3}$	$4,8 \cdot 10^{-3}$		0,5*5 (exiger valeurs exactes) non noté
Matériau	Cuivre	Aluminium	Fer	Polymère conducteur	Polyamide isolant																
$\frac{1}{K} \frac{\Delta F}{F_{\text{frot}}}$	$1,6 \cdot 10^{-7}$	$1,2 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-2}$	$5,7 \cdot 10^{-8}$	$5,7 \cdot 10^{-8}$																
$\frac{\Delta F}{F_{\text{frot}}}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	$1 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^3$	$4,8 \cdot 10^{-3}$	$4,8 \cdot 10^{-3}$																
	<p>Seul dans le cas du fer, la force magnétique est supérieure à la force de frottement. On peut envisager de trier les matériaux ferromagnétiques (qui se décalent vers la zone où le champ magnétique est le plus élevé) des autres matériaux (dont la position sur le tapis reste fixe).</p>		1																		
	<b>TOTAL I</b>		<b>20 points</b>																		

3

2

1

4,5

## II – Tri par courants de Foucault : 20 points

<p>1 Dans le vide <math>\mathbf{j} = 0</math> donc <math>\text{rot } \mathbf{B} = 0</math>.</p>	0,5
$\text{rot } \vec{B} = \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \vec{u}_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{B_0}{x_0}$ $\Rightarrow B_x = \frac{B_0}{x_0} z + \text{cste}$	0,5
<p>On prend <math>B_x = 0</math> en <math>z = 0</math> donc la constante est nulle</p>	
<p>Finalement <math>\vec{B} = \frac{B_0}{x_0} z \vec{u}_x + \frac{B_0}{x_0} x \vec{u}_z</math></p>	
<p>2 Le flux à travers la spire augmente au fur et à mesure qu'elle progresse sur le tapis roulant.</p>	0,5
<p>Donc f.e.m. d'induction</p>	0,5
<p>Un courant d'induction apparaît donc dans la spire.</p>	0,5
<p>Les forces de Laplace tendent à s'opposer à la variation de flux, donc à freiner la progression de la spire sur le tapis roulant</p>	0,5
<p>3-1 La composante <math>B_x</math> ne contribue pas au flux (normale à la spire = <math>\mathbf{u}_z</math>) ;</p>	0,5
<p><math>d\phi = +B_z dS</math> compte tenu de l'orientation</p>	
<p>La spire est symétrique par rapport à <math>x = x_c</math> et <math>B_z(x_c - d) = B_z(x_c) - d B_0/x_0</math>, <math>B_z(x_c + d) = B_z(x_c) + d B_0/x_0</math>. Donc en sommant par tranches symétriques par rapport à <math>x = x_c</math> les composantes linéaires en <math>d</math> se compensent et il ne reste que la contribution du terme central <math>\pi a^2 B_z(x_c)</math>.</p>	1
<p>Accepter un paramétrage en <math>x = x_c + r \cos \theta</math>, <math>0 \leq r \leq a</math>, <math>0 \leq \theta \leq 2\pi</math>, intégrant <math>d\phi</math></p>	
<p><math>\{B_z(x_c) + r \cos \theta B_0/x_0\} r dr d\theta</math> qui conduit au même résultat en intégrant d'abord en <math>\theta</math> (la valeur moyenne d'un cosinus sur une période est nulle)</p>	
<p>3.2 <math>e = -d\phi/dt = -\pi a^2 dB_z(x_c)/dt = -\pi a^2 B_0/x_0 dx_c/dt = -\pi a^2 v B_0/x_0</math> négative</p>	0,5
<p><math>i</math> orienté dans le sens trigonométrique cohérent avec la normale <math>\mathbf{u}_z</math></p>	0,5
<p><math>L di/dt + R_0 i = e = -\pi a^2 v B_0/x_0</math></p>	0,5
<p>Equa diff du premier degré à coefficients constants et second membre</p>	
<p>solution particulière de régime établi <math>i_\infty = -\pi a^2 v B_0 / (R_0 x_0) + \text{sol. générale } K \exp(-R_0 t/L)</math></p>	0,5
<p>Condition initiale : <math>i = 0</math> à <math>t = 0</math> d'où <math>K = \pi a^2 v B_0 / (R_0 x_0)</math></p>	
<p>Soit <math>i(t) = -\pi a^2 v B_0 / (R_0 x_0) \{1 - \exp(-R_0 t/L)\}</math></p>	0,5
<p>3.3 Autour de <math>x = x_c + a \cos \theta</math>, <math>0 \leq \theta \leq 2\pi</math> la force de Laplace sur l'élément <math>dl = a d\theta</math> est radiale et sa norme dépend de l'abscisse <math>x</math>, donc en sommant les contributions de deux éléments situés en <math>(x, y)</math> et <math>(x, -y)</math>,</p>	
<p>il vient une force <math>d\mathbf{F}</math> dirigée suivant <math>\mathbf{u}_x</math> :</p>	1
<p>3.4 <math>d\mathbf{F} = 2i (x_c + a \cos \theta) a \cos \theta B_0/x_0 d\theta \mathbf{u}_x</math> à intégrer entre 0 et <math>\pi</math>.</p>	
<p>Seul le terme en <math>\cos^2 \theta</math> donne un résultat non nul, d'où :</p>	
<p><math>\mathbf{F} = \pi i a^2 B_0/x_0 \mathbf{u}_x</math></p>	1,5
<p>En remplaçant <math>i</math> par <math>i_\infty = -\pi a^2 v B_0 / (R_0 x_0)</math> il vient</p>	
<p><math>\mathbf{F} = -\pi^2 a^4 (B_0/x_0)^2 v / R_0 \mathbf{u}_x = -\pi^2 a^4 (B_0/x_0)^2 / R_0 v</math></p>	0,5
<p>D'où <math>k = -\pi^2 a^4 (B_0/x_0)^2</math></p>	
<p>C'est une force de frottement fluide (proportionnelle à la vitesse). On pouvait effectivement prévoir que la force de Laplace s'oppose à la variation de flux et donc à l'avancée de la spire dans la zone de champ magnétique, d'où <math>k \leq 0</math>.</p>	0,5
<p>3.5 La masse de l'anneau est égale à <math>2\pi a S \rho</math></p>	0,5
<p>La résistance <math>R_0</math> vaut <math>2\pi a / (\gamma S)</math>, donc en substituant l'expression précédente l'accélération</p>	0,5
<p><math>F/2\pi a S \rho = -a^2 (B_0/x_0)^2 \gamma / (4\rho) v = -a^2 (dB_z/dx)^2 \gamma / (4\rho) v</math></p>	
<p><math>f = \gamma / (4\rho)</math> dépend du rapport conductivité / masse volumique, paramètre matériau</p>	0,5

3.6 Dans le dispositif étudié le tri n'est pas commode car la force de Laplace se contente de repousser davantage les métaux que les isolants sur le tapis roulant qui de toute façon avance. En revanche dans le dispositif réel les métaux sont expulsés hors du tapis roulant vers le bac 1 tandis que les déchets isolants tombent par gravité vers le bac 2. L'expulsion est plus efficace pour des anneaux de grand diamètre (effet proportionnel à $a^2$ ) Entre les différents matériaux : le rapport $\gamma/\rho$ vaut $7,2 \cdot 10^3$ (Cu), $1,5 \cdot 10^4$ (Al), $1,4 \cdot 10^3$ (Fe), 23 (polymère conducteur), $9 \cdot 10^{-15}$ (polymère isolant), c'est donc l'aluminium qui est entraîné le plus loin, mais le dispositif reste efficace pour Cu et Fe. Les autres matériaux ne bougent pas.	0,5 0,5 0,5
4.1 En un point donné, $B_{ext} = B_0 x/x_0 \mathbf{u}_x + B_0/x_0 z \mathbf{u}_z$ , donc $\partial B_{ext}/\partial t = B_0/x_0 \partial x/\partial t \mathbf{u}_x + B_0/x_0 \partial z/\partial t \mathbf{u}_z$ soit $\partial B_{ext}/\partial t = B_0/x_0 \nabla \cdot \mathbf{u}_z$ ( $\partial z/\partial t = 0$ )	0,5
4.2 On a $\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E}$ et $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial B_{tot}/\partial t$ donc $\text{rot } \mathbf{j} = -\gamma \partial B_{tot}/\partial t = -\gamma B_0 \nabla/x_0 \mathbf{u}_z$ donc $\text{rot } \mathbf{j} = \mathbf{K}' \mathbf{u}_z$ avec $\mathbf{K}' = -\gamma B_0 \nabla/x_0$	0,5 0,5 0,5
4.3 $\mathbf{j} = j \mathbf{e}_\theta$ $\frac{1}{r} \frac{\partial(rj)}{\partial r} = -\gamma B_0 \nabla/x_0$ s'intègre en $j = \frac{\gamma B_0 \nabla}{2x_0} r + \frac{C}{r}$ (C constante) Le champ $\mathbf{E}$ ne peut pas diverger en $r = 0$ (pas de charge ponctuelle ou linéique sur l'objet) donc la constante C est nulle	0,5 0,5 0,5
4.4 Puisque l'anneau est fin, r est à peu près égal à a et j(r) à j(a) dans toute la section S L'intensité est le flux de j à travers la section S : $i = -\gamma B_0 \nabla a S / (2x_0) = -B_0 \nabla a 2\pi a / ((2x_0) \gamma S / (2\pi a))$ (en utilisant $R_0 = 2\pi a / (\gamma S)$ ) $i = -\pi a^2 \nabla B_0 / (R_0 x_0)$ On retrouve le résultat précédent	0,5 0,5 0,5
4.5 Le plus rapide est de réutiliser la formule obtenue au 3.4 : $\mathbf{F} = \pi i r^2 B_0/x_0 \mathbf{u}_x$ , avec $i = -\gamma B_0 \nabla r S / (2x_0)$ qui vient d'être établi au 4.4 pour un anneau de rayon r et section S, puis remplacer S par h dr et intégrer de $r = 0$ à $r = a$ . Il vient $\mathbf{F} = -(B_0/x_0)^2 \pi \gamma \nabla h a^4 / 8 \mathbf{u}_x$  On peut aussi évaluer la force de Laplace élémentaire $d\mathbf{F} = \text{produit vectoriel } j d\mathbf{r}$ par $\mathbf{B}$ , où $d\mathbf{r}$ est le volume élémentaire entourant le point où on évalue la force. Puis intégration.  accélération $-(B_0/x_0)^2 \gamma a^2 / (8\rho) \mathbf{V}$ ; le facteur f devient $\gamma / (8\rho)$	1,5 0,5
<b>TOTAL II</b>	<b>20</b>

**TOTAL GENERAL sur 40 points**

**Le coefficient diviseur sera fixé ultérieurement**