INSA –1er Cycle
SCAN 70-71-72

Mercredi 20 octobre 2004

INTERROGATION n°1
1H
(avec calculatrice autorisée)

Barème indicatif :
Question de cours : 3 points ; Exerc.1 : 7 points ; Exerc.2: 10 points .

Question de cours :

1) Enoncer la loi de Biot et Savart en définissant (à l'aide d'un schéma) les grandeurs intervenant dans l'expression de cette loi.
2) Donner les relations de passage pour **B**.
3) Enoncer le théorème de Maxwell en précisant les grandeurs intervenant dans ce théorème.

Exercice 1
Utilisation du théorème d'Ampère et vérification des conditions de passage pour ***B***.
On considère un cylindre creux d'axe (Oz), infiniment long, de rayon intérieur R et de rayon extérieur $R+e$. Il est parcouru par un courant I, circulant le long de l'axe de révolution du cylindre, associé à un vecteur densité de courant volumique uniforme $\boldsymbol{j}=j\boldsymbol{e}_z$, $\boldsymbol{e}_z$ un vecteur unitaire de l'axe de révolution du cylindre.

1. Exprimer la densité de courant volumique j en fonction de I et des grandeurs géométriques du problème.
Dans le cas où e<<R, on considère que la densité volumique de courant se réduit à une densité surfacique $\boldsymbol{j_s}$ associée à la même valeur de courant I. Donner l'expression de $\boldsymbol{j_s}$ en fonction de I et des grandeur(s) géométrique(s) associée(s) à cette distribution surfacique.

2. Indiquer quelles sont les symétries et les invariants du problème. En déduire les caractéristiques de ***B*** , à savoir son orientation et le(s) variable(s) dont il dépend.

3. En utilisant le théorème d'Ampère, indiquer la valeur de ***B*** en tout point de l'espace. La région à l'intérieur du cylindre sera repérée par r, la distance du point considéré à l'axe (Oz), et correspondra à $R \le r \le R+e$ (on pourra utiliser les coordonnées cylindriques).
Vous indiquerez clairement le contour et la surface choisis.

4. On se place dans le cas où e<<R.
4.1 Que deviennent les expressions de ***B*** pour $r<R$ et $r>R+e$?
Pour $R \le r \le R+e$, Calculer l'expression de ***B***. On pourra utiliser $r = R+u = R(1+u/R)$, avec $0 \le u \le e$, et ne retenir que les termes d'ordre 1 dans l'expression de ***B*** pour arriver à une expression approchée de ***B****(u)*.

4.2 A partir des expressions de ***B*** en $r = R-\varepsilon \approx R^-$ et $r = R+\varepsilon \approx R^+$, avec $\varepsilon \to 0$, donner les expressions de ***B*** sur la face intérieure et extérieure du cylindre.
Enoncer la relation de passage pour ***B*** à la traversée d'une nappe de courant et démontrer que la valeur $\boldsymbol{B}^+ - \boldsymbol{B}^-$ respecte ce théorème. On exprimera pour cela $\boldsymbol{B}^+ - \boldsymbol{B}^-$ en fonction de la densité de courant surfacique $\boldsymbol{j_s}$ et on précisera la géométrie de l'interface.

Exercice 2:

Les circuits considérés sont placés dans le vide.

1) Un fil rectiligne illimité Δ est parcouru par un courant I dans le sens de l'unitaire **k**.

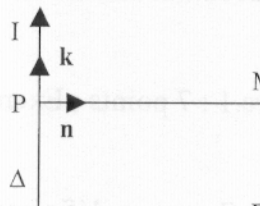


Fig 1

Déterminer **B** créé en M par Δ.

2) Deux fils rectilignes illimités Δ_1 et Δ_2 et parallèles à Oz coupent l'axe x'Ox en A_1 (coordonnées cartésiennes : -a,0,0) et A_2 (a,0,0). Dans la suite du problème, Δ_1 et Δ_2 sont fixes et parcourus dans le sens de **k** par des courants de même intensité I.

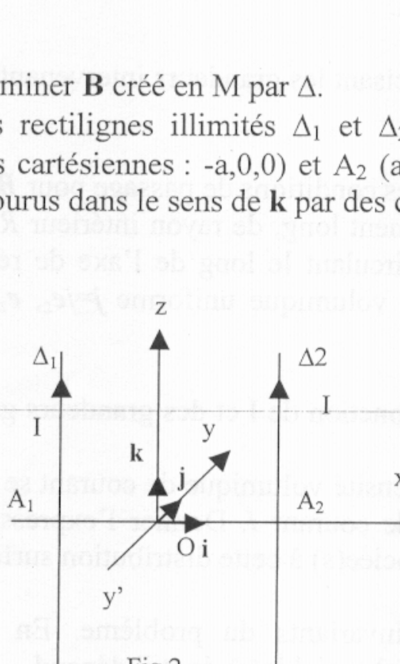


Fig 2

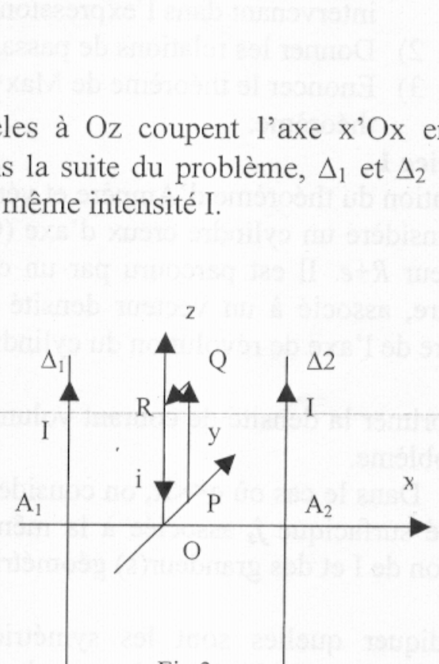


Fig 3

a) Exprimer le vecteur **B** crée par l'ensemble (Δ_1, Δ_2) en un point M de l'axe y'oy, tel que $\overline{OM}=y$.

b) A.N. I=10A, a=10cm. Etudier les variations, en fonction de y, de la mesure algébrique $\overline{B}$ du vecteur **B** suivant un unitaire que l'on précisera. Déterminer la valeur numérique du maximum et représenter graphiquement la fonction.

3) On considère, dans le plan yoz, un cadre carré OPQR de côté a parcouru par un courant i.

a) Montrer que le torseur des forces magnétiques exercées sur OP par l'ensemble(Δ_1, Δ_2) se réduit à une force unique **F**. Exprimer le vecteur **F** en fonction des données.

b) Calculer, pour a=10cm, l'ordonnée Y du point où la ligne d'action de **F** rencontre l'axe Oy

(on donne $\int \frac{dx}{1+x^2}=\arctan x$, $\frac{x^2}{a^2+x^2}=1-\frac{a^2}{a^2+x^2}$).

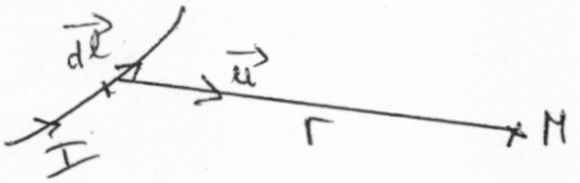
c) Déterminer la résultante des forces magnétiques **R** exercées sur le cadre OPQR par l'ensemble (Δ_1, Δ_2).

d) Calculer le flux de **B** crée par (Δ_1, Δ_2) à travers le cadre. ~~En déduire l'expression de la force exercée sur le cadre par (Δ_1, Δ_2).~~

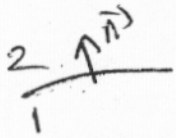
[on donne $\mu_0=4\pi.10^{-7}$ S.I.]

Interro 1 / 04-05 / SCAN

Questions de cours

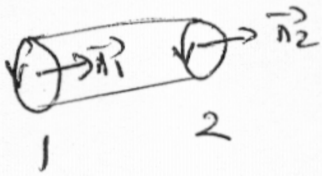
1) 

; $\vec{dB} = \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \dfrac{\vec{dl} \wedge \vec{u}}{r^2}$ — 0,5 ; 0,5

2) 

$\vec{B}_{n_1} = \vec{B}_{n_2}$ — 0,5

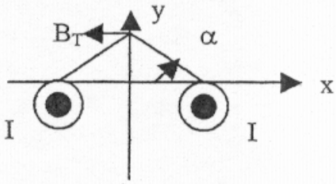
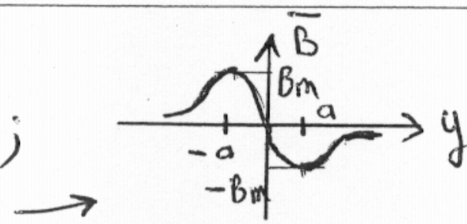
$\vec{B}_{t_2} - \vec{B}_{t_1} = \mu_0 \vec{k} \wedge \vec{n}$ — 0,5

3) $T_e = i\,(\phi_2 - \phi_1)$; i 

— 0,5 ; 0,5

Corrigé – Barème Ex1

1. $\vec{j} = \dfrac{I}{\pi\left((R+e)^2 - R^2\right)}\vec{e}_z = \dfrac{I}{\pi\left(e^2+2Re\right)}\vec{e}_z$ $\vec{j}_s = \dfrac{I}{2\pi R}\vec{e}_z$	½ ½	1
2. Tout plan P contenant (Oz) = plan de symétrie pour les courants ➔ ***B*** est normal à P et ***B***=*B(r, θ,z)e*$_\theta$ invariance du problème par translation suivant z ou rotation suivant θ ➔ ***B***=*B(r)e*$_\theta$	½ ½ (0 si 1 seule invariance)	1
3. Dans tous les cas, il conviendra d'utiliser un cercle centré en un point de (Oz), dont le plan est normal à $\boldsymbol{e}_z$. On utilise alors : $\oint_\Gamma \boldsymbol{B}.\boldsymbol{dl} = 2\pi r B(r) = \mu_0 i(r)$ avec i(r) = somme des courant traversant Σ s'appuyant sur Γ r<R, i(r)=0 et ***B***(r)=***0*** r>R, i(r)=I et $\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\boldsymbol{e}_\theta$ $R \le r \le R+e$, $i(r) = j\pi(r^2-R^2) = I\dfrac{r^2-R^2}{e^2+2Re}$ et $\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\dfrac{r^2-R^2}{e^2+2Re}\boldsymbol{e}_\theta$	½ si dans chaque cas Γ et Σ bien définie (orientée !) ½ ½ ½ + ½	2,
4.1 en posant *r=R+u = R(1+u/R)* on arrive à $B(u) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R(1+u/R)}\dfrac{R^2(2u/R+u^2/R^2)}{R^2(e^2/R^2+2e/r)} \to \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\dfrac{u}{eR}$	½ expr. exacte ½ approx.	1
4.2 **B+** - **B-** = μo **js x e**$_{-+}$ (cours) pour r=R$^-$, ***B=0*** pour r=R$^+$, $\boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}\boldsymbol{e}_\theta$ d'après 4.1 La discontinuité *ΔB=B*$^+$ *- B*$^-$ = $\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}\boldsymbol{e}_\theta$ soit $\Delta\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}_s \times \boldsymbol{e}_r$ Qui correspond bien à la condition d'interface établie en cours.	½ ½ ½ identification interface	1
TOTAL	~~7.5~~ 7	

Ex2 1) schéma; $\mathbf{B}=(\mu_0 I/2\pi r)\mathbf{k}\wedge\mathbf{n}$	0,5; 0,5
2) 	0,5
$B_T=2B\sin\alpha$, $\sin\alpha=\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}$ $\vec{B_T}=\frac{-\mu_0 I y}{\pi\left(a^2+y^2\right)}\vec{i}$ Etude ; $B_m=2.10^{-5}$ T; Schéma 	1 ; 0,5 ;0,5 ;1
3a) $dF=dyiB=\frac{\mu_0 dy i I y}{\pi\left(a^2+y^2\right)}$; $\vec{F}=\frac{\mu_0 iI}{2\pi}\ln 2\vec{k}$	0,5 1
b) $d\Gamma=dFy=\frac{\mu_0 dy i I y^2}{\pi\left(a^2+y^2\right)}$; $\Gamma=\frac{\mu_0 iIa}{\pi}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=FY$ $Y=\frac{a(4-\pi)}{2\ln 2}$; A.N. Y=6,2cm	0,5 0,5 ; 0,5
c) force sur OP : $\vec{F_2}=\frac{\mu_0 iI}{2\pi}\ln 2\vec{k}$ force sur RQ : $\vec{F_1}=-\frac{\mu_0 iI}{2\pi}\ln 2\vec{k}$ force sur PQ : $\vec{F_3}=-B(y)a\vec{j}$ force sur OP : $\vec{F_4}=\vec{0}$ $\vec{R}=\vec{F_3}=-B(y)ia\vec{j}$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,5
d) $d\Phi_1=-B(y)dya=-\frac{\mu_0 Iaydy}{\pi\left(a^2+y^2\right)}$ $\Phi 1=-\frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln 2$	0,5 0,5
	Total:10pts