Deuxième Année

Année scolaire 2005/2006

PHYSIQUE
Interrogation n°3

Mercredi 4 janvier 2006 **Durée : 1h30**

Barème approximatif : Questions de cours : 5 pts ; Exercice 1 : 7 pts ; Exercice 2 : 8 pts.

Questions de cours

1) On considère une onde acoustique se propageant dans une colonne de fluide d'axe Ox et dont la surpression est donnée par :

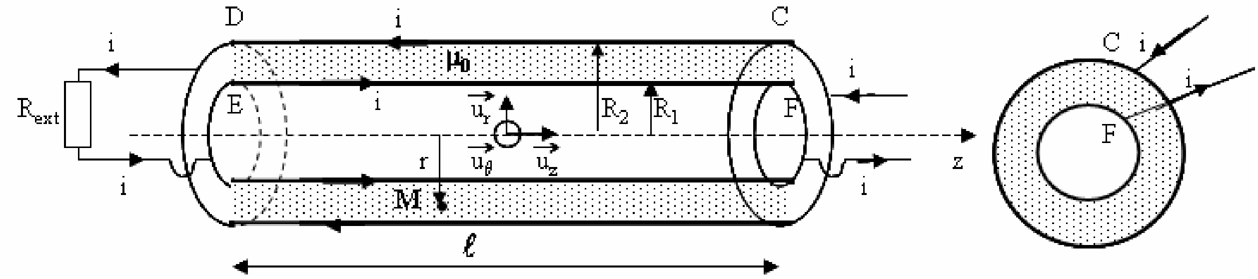
$$p(x,t) = P_M \cos(\omega t + kx) \qquad \omega, k \text{ et } P_M \text{ étant des constantes.}$$

Donner en justifiant vos réponses :
- la forme spatiale de l'onde (on précisera l'équation d'une surface d'onde),
- la direction de propagation et la vitesse de phase,
- la période temporelle, la fréquence et la longueur d'onde,
- la valeur efficace de la surpression.

2) Donner les quatre équations de Maxwell en régime variable quelconque. A partir de ces équations, retrouver la structure du champ électromagnétique transporté par une onde électromagnétique plane et uniforme se propageant dans le vide. Donner la relation entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

Exercice 1 : Auto-induction dans un câble coaxial

On considère un câble électrique coaxial constitué de deux conducteurs cylindriques tubulaires de même axe z'z, de longueur ℓ et de rayons R_1 et R_2 avec $R_2 > R_1$.



Les deux conducteurs sont séparés par un matériau isolant électrique, non magnétique de perméabilité μ_0. Le conducteur de rayon R_2 est revêtu d'un isolant extérieur non représenté sur la figure ci-dessus. L'épaisseur des deux conducteurs cylindriques est très faible : on pourra donc considérer que les courants qu'ils transportent sont des courants de surface et que la densité de courant superficielle est homogène pour chaque conducteur. L'ensemble est repéré en coordonnées cylindriques ($\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$), $\vec{u}_z$ étant dirigé selon l'axe du câble. Ce câble est branché sur une résistance externe R_{ext}. Le conducteur intérieur est parcouru par un courant total i dans le sens de $\vec{u}_z$. Le conducteur de rayon R_2 est donc parcouru par le même courant en sens inverse du précédent. L'ensemble de l'exercice est traité dans l'approximation des régimes quasi-permanents.

1) ℓ étant très supérieure à R_1 et R_2, on se placera dans l'hypothèse de conducteurs de longueur infinie. A l'aide du théorème d'Ampère, déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ créé en tout point de l'espace par le câble coaxial (on distinguera les trois régions : $0 \le r < R_1$, $R_1 < r < R_2$, $r > R_2$).

2) En déduire l'énergie magnétique W stockée par ce câble.

3) Montrer que le coefficient de self-induction (ou d'auto-induction) L d'un tel câble s'écrit :

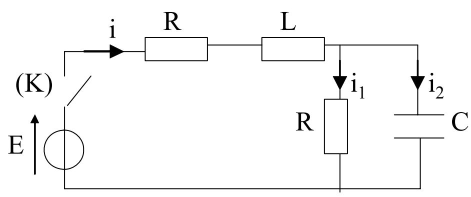
$$L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Application numérique :
- Calculer L pour $\ell = 2$ m, $R_1 = 1$ mm, $R_2 = 1{,}5$ mm.
- Calculer numériquement l'impédance de la bobine lorsque le courant qui parcourt le circuit est sinusoïdal de fréquence 50 Hz. La résistance externe R_{ext} étant de 10 Ω, quelle conclusion en tirez-vous ?

4) Le câble est parcouru par un courant variable quelconque i(t). Quelle est l'expression de la f.e.m. e d'auto-induction apparaissant à ses bornes ? En déduire, en fonction de i et des caractéristiques géométriques du câble, l'expression du flux propre Φ traversant le circuit. Comment peut-on calculer autrement ce flux Φ ?

Exercice 2 : Circuits en régime quasi-permanent

I - On considère le circuit ci-dessous alimenté par un générateur de f.e.m. constante E. On ferme l'interrupteur (K) à l'instant t = 0, le condensateur étant initialement déchargé. Les composants R, L et C sont tels que $L = R^2C$. On pose $RC = L/R = \tau$.



1) Sans faire aucun calcul, prévoir les valeurs $(i_1)_p$, $(i_2)_p$ et $(i)_p$ des courants i_1, i_2 et i en régime permanent continu.

2) Ecrire les conditions initiales et en déduire les valeurs $(i_1)_{0+}$, $(i_2)_{0+}$ et $(i)_{0+}$ des courants i_1, i_2 et i à l'instant t = 0+.

3) Ecrire un système de 3 équations indépendantes vérifiées par les courants i_1, i_2 et i. En déduire la valeur $(di/dt)_{0+}$ de (di/dt) à l'instant t = 0+.

4) A partir de ce système d'équations, on montre que l'équation différentielle vérifiée par le courant i(t) s'écrit :

$$\tau^2 \frac{d^2i}{dt^2} + 2\tau\frac{di}{dt} + 2i = \frac{E}{R}$$

Sans faire de démonstration complète, justifier simplement le fait que la solution i(t) est de la forme :

$$i(t) = K + e^{\frac{-t}{\tau}}\left[A\cos\frac{t}{\tau} + B\sin\frac{t}{\tau}\right] \qquad \text{avec} \qquad \tau = RC = L/R$$

Donner la valeur de K.
Déterminer les valeurs de A et B en fonction de E et R.

II - On remplace la source de tension continue par une source de tension sinusoïdale de f.e.m. $e(t) = E_M \cos\omega t$. Le condensateur (C) est initialement déchargé. A l'instant t = 0, on ferme l'interrupteur (K).

1) On s'intéresse d'abord au régime permanent.

a) Montrer que l'impédance complexe équivalente $\underline{z}$ du circuit peut se mettre sous la forme :

$$\underline{z} = R\left[1 + \frac{K_1}{1+\tau^2\omega^2}\right] + jL\omega\left[1 + \frac{K_2}{1+\tau^2\omega^2}\right] \qquad \text{(on rappelle que } R^2C = L)$$

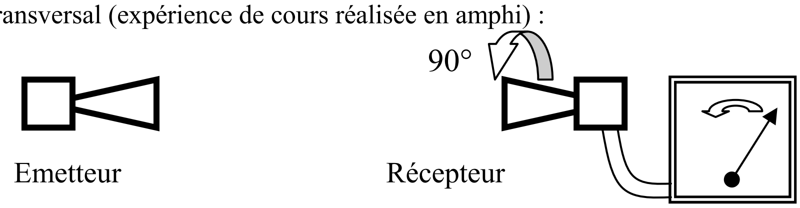
Donner les valeurs de K_1 et K_2.
Application numérique : $E_M = 10$ V, ω = 1000 rd/s, R = 1000 Ω, L = 1 H, C = 1 μF, $RC = L/R = \tau = 10^{-3}$ s.
Calculer numériquement l'impédance complexe $\underline{z}$.

b) Déterminer numériquement le courant i(t) en régime sinusoïdal permanent sous la forme $i(t) = I_M\cos(\omega t - \varphi)$.

2) Donner la forme de l'expression de i(t) pour tout instant t ≥ 0, puis les deux équations qui permettraient de déterminer les constantes d'intégration (on ne demande pas de calculer ces constantes).

CORRIGE-BAREME

Interrogation 3 du 4 Janvier 2006

	Questions de cours	Barème/20
1)	ω = 6283,2 rd/s ; f = 1000 Hz ; T = 10^{-3} s ; k = 10 rd/m ; V = 628,3 m/s ; λ = 0,628 m. *Enlever 0,25 par réponse fausse ou omission (résultat ou unité)* Respectivement : pulsation, fréquence, période (temporelle), nombre d'onde angulaire, vitesse de propagation (ou célérité ou vitesse de phase), longueur d'onde. *Enlever 0,25 par dénomination fausse ou omission*	1 1
2)	Onde plane (surface équiphase d'équation y = cste), perpendiculaire à Oy, se propageant dans le sens Oy décroissant $Z = \rho_0 V$ = 1256,6 rayl $P_M = \sqrt{(2 ZI)}$ = 1120 Pa $P_2 = P_1$ En assimilant localement la sphère à une onde plane (justifié sauf si l'on est trop près de l'origine O) : $P_1 = \frac{4\pi R_1^2 P_{M1}^2}{2Z} = P_2 = \frac{4\pi R_2^2 P_{M2}^2}{2Z}$ d'où l'on déduit $\frac{P_{M1}}{R_2} = \frac{P_{M2}}{R_1}$	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25+0,25
3)	$\overrightarrow{rotH} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ Accumulation locale de charges	0,25+0,25
4)	On place en regard un émetteur et un récepteur de micro-ondes sensibles au champ électrique transversal (expérience de cours réalisée en amphi) :  En tournant le récepteur de 90° sur lui-même, on constate que la réception devient nulle : seule une onde vectorielle transversale peut produire un tel effet.	0,25 0,5
	TOTAL Questions de cours	5 points
	EXERCICE I	
1)	application du théorème d'Ampère et superposition des 2 champs $\vec{B} = \vec{0}$ pour $r < R_1$ ou $r > R_2$ $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{u}_\theta$ pour $R_1 < r < R_2$	0,5 1
2)	$W = \iiint_{(\tau)} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 i^2 \ell}{4\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i^2 \ell}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$	0,5+1+0,5
3)	$W = \frac{1}{2} L i^2 \rightarrow L = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$ L = 162 nH En alternatif , l'impédance de la self est $z_L = j5{,}1 . 10^{-5}$ Ω et est donc négligeable devant R_{ext}.	1 0,25 0,5 + 0,25
4)	$e = - L \frac{di}{dt}$ $e = - \frac{d\Phi}{dt}$ soit $\Phi = Li = \frac{\mu_0 \ell i}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$ Φ est le flux de B à travers une section CDEF du câble coaxial.	0,5 0,25 0,25

	$\Phi=\int_{R_1}^{R_2}\vec{B}.d\vec{S}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 i}{2\pi\ r}\ \ell dr=\frac{\mu_0\ell i}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$	0,5
	TOTAL Exercice I	7 pts
	EXERCICE II	
I1)	En régime permanent continu, le condensateur se compote comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un interrupteur fermé. Le condensateur se charge sous la ddp E/2 et $(i_2)_p = 0$ donc $(i)_p = (i_1)_p = E/2R$	0,25 0,25 0,25
I2)	Continuité du courant dans L donc : $(i)_{0+} = 0$ Continuité de la ddp aux bornes de C donc $(u_C)_{0+} = 0$ Donc $R(i_1)_{0+} = 0$ donc $(i_1)_{0+} = 0$ Donc $(i_2)_{0+} = 0$	0,25 0,25 0,25 0,25
I3)	$E=Ldi/dt+Ri+Ri_1$ $Ri_1 = \frac{1}{C}\int i_2 dt$ ou $R\frac{di_1}{dt} = \frac{i_2}{C}$ $i=i_1+i_2$ D'après la première équation : $(di/dt)_{0+} = E/L$	0,25 0,25 0,25 0,25
I4)	Eq. caractéristique $\tau^2r^2+2\tau r+2 = 0$ Le discriminant réduit est égal à $-\tau^2 < 0$ Donc 2 racines complexes : $r=(-1\pm j)/\tau$ Ce qui conduit à $i(t) = K+ e^{-\frac{t}{\tau}}\left[A\cos\frac{t}{\tau}+B\sin\frac{t}{\tau}\right]$ K régime permanent donc $K = (i)_p = E/2R$ $(i)_{0+} = 0 \Rightarrow A=-E/2R$ $(di/dt)_{t=0}=E/L \Rightarrow B=E/2R$ soit $i(t) = \frac{E}{2R}\left[1+e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\sin\frac{t}{\tau} - \cos\frac{t}{\tau}\right)\right]$	 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,5 0,25
II1) a)	$\underline{z} = \left(jL\omega + R\right) + \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega}$ Soit $\underline{z} = R\left[1+\frac{1}{1+\tau^2\omega^2}\right] + jL\omega\left[1-\frac{1}{1+\tau^2\omega^2}\right]$ donc $K_1 = 1$ et $K_2 = -1$. A.N. $\underline{Z} = (1500+500j)\Omega$ *(mettre 0/0,25) si K_1 et K_2 faux)*	0,25 0,25 + 0,25 0,25
b)	$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{z}}$ $I_M = \frac{U_M}{Z}$ soit $I_M = \frac{U_M}{\sqrt{(1500)^2+(500)^2}} = 6,3mA$ *(mettre 0/0,25) si K_1 et K_2 faux)* $\varphi = \arg(\underline{z})$ Soit $\tan\varphi = 500/1500$, $\varphi = 0,321rad = 18,43°$ *(mettre 0/0,25) si K_1 et K_2 faux)* i(mA)=6,3cos(1000t-0,321rad)	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
II2)	$i = e^{-\frac{t}{\tau}}\left[A\cos\frac{t}{\tau}+B\sin\frac{t}{\tau}\right] + I_M\cos(\omega t-\varphi)$ $t = 0$, $(i)_{0+} = 0$, et $(di/dt)_{0+} = (e)_{0+}/L = E_M/L$ $\Rightarrow A=-I_M\cos\varphi$ $\Rightarrow B=(E_M/R)-I_M[\cos\varphi+\sin\varphi]$	0,5 0,25 0,25 Non demandé
	TOTAL Exercice II	8 pts
	TOTAL	20 pts