PC Deuxième Année
Année 2006/2007

Physique : Interrogation n° 3

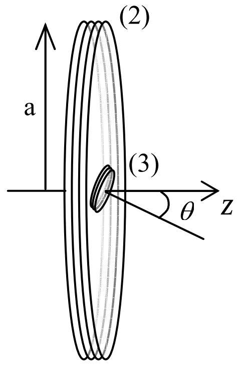
Jeudi 25 janvier 2007 **Durée : 1h30**

Barème indicatif : Cours : 5 pts, exercice 1 : 5 pts, exercice 2 : 5 pts, exercice 3 : 5 pts

Questions de cours

A) Auto-induction et inductance mutuelle

1. Une bobine, placée dans le vide, est constituée d'un solénoïde de section $S_1 = 20$ cm^2 et de longueur $l_1 = 30$ cm, et comporte $N_1 = 600$ spires. En supposant que ces dimensions permettent de considérer cette bobine comme un solénoïde infini, exprimer et calculer son inductance propre ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ *S.I.*).



2. On considère maintenant une bobine plate circulaire de rayon a, de surface S_2, formée de N_2 spires et, en son centre, une petite bobine de surface S_3 très inférieure à S_2 ($S_3 << S_2$) et contenant N_3 spires. Exprimer leur inductance mutuelle M si θ est l'angle entre les normales des deux bobines ? (complétez le schéma pour définir le signe de M).
   Rappel : Le champ magnétique au centre de la grande bobine est donné par : $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 N_2 i_2}{2a} \vec{u}_z$.

B) Ondes électromagnétiques

Une onde électromagnétique progressive, plane, uniforme et sinusoïdale de fréquence $f = 3 \cdot 10^6$ Hz se propage selon Oz dans un diélectrique parfait non magnétique ($\mu_r = 1$) de permittivité relative $\varepsilon_r = 1200$.

1. Quelle est la vitesse de propagation V de l'onde ? et sa longueur d'onde ?
2. Calculer l'amplitude B_0 du champ magnétique $\vec{B}(z,t)$ sachant que le champ électrique $\vec{E}(z,t)$ a une amplitude $E_0 = 15$ mV.m^{-1}.

Exercice 1 : Circuits couplés (partie 1 : régime transitoire)

On considère les deux circuits couplés représentés sur la figure 1. Le circuit primaire (circuit de gauche) est alimenté par un générateur de f.e.m. continue E. Pour simplifier, on supposera que $L_1 = L_2 = L$, que $R_1 = R_2 = R$, et que le coefficient d'inductance mutuelle M est positif et strictement inférieur à L (couplage imparfait ; $M < L$). L'interrupteur K est fermé à l'instant $t = 0$.

1. Ecrire les deux équations différentielles couplées qui décrivent l'évolution de $i_1(t)$ et $i_2(t)$.
2. En faisant le changement de variable $I(t) = i_1 + i_2$ et $J(t) = i_1 - i_2$, en déduire deux équations différentielles non couplées.
3. Déterminer les expressions de $I(t)$ et $J(t)$.

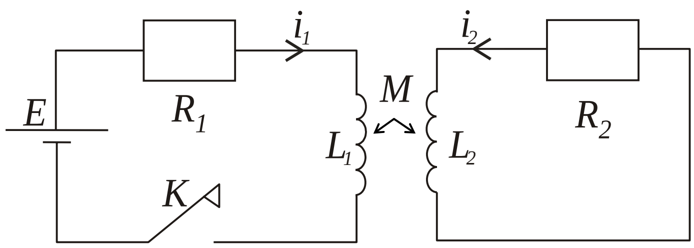


Figure 1

4. Déterminer les expressions de $i_1(t)$ et $i_2(t)$, et représenter schématiquement sur un graphe leur évolution en fonction du temps.

Exercice 2 : Circuits couplés (partie 2 : excitation sinusoïdale)

On considère les deux circuits couplés représentés sur la figure 2. On supposera de nouveau que $L_1 = L_2 = L$, et que le coefficient d'inductance mutuelle M est positif et strictement inférieur à L. Le secondaire (circuit de droite) est en circuit <u>ouvert</u>. Le générateur délivre une tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$. L'interrupteur K est fermé à l'instant $t = 0$.

1. Ecrire les deux équations différentielles pour $i_1(t)$ et $u_2(t)$.
2. Etablir l'expression de $i_1(t)$ à partir de $t = 0$.
3. En déduire l'expression de $u_2(t)$ à partir de $t = 0$.

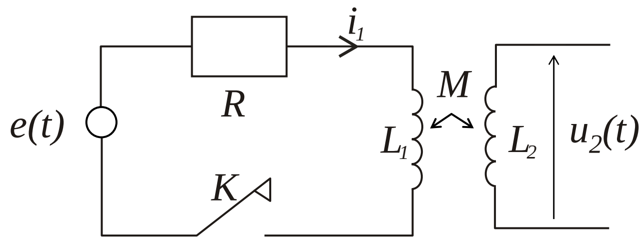


Figure 2

4. Application numérique : $E = 1$ V, $f = 50$ Hz, $R = 100\ \Omega$, $L = 0{,}1$ H, $M = 0{,}05$ H
Pour le régime permanent forcé, calculer les amplitudes : I_1 du courant $i_1(t)$, U_R de la tension $u_R(t)$ aux bornes de la résistance R, U_{L1} de la tension aux bornes de inductance L_1 et U_2 de la tension $u_2(t)$ aux bornes de l'inductance L_2.

Exercice 3 : Ondes acoustiques

1. Un haut-parleur est branché aux bornes du circuit de la figure 2. Il émet une onde acoustique progressive qui se propage dans la direction x, dans un gaz parfaitement élastique, confiné dans un tube à paroi rigide. La masse volumique de ce gaz est $\rho_0 = 1{,}2$ kg.m^{-3} et son impédance acoustique spécifique est $Z = 400$ Rayls. Retrouver l'expression de Z en fonction de κ et ρ_0. Calculer la vitesse de propagation V de l'onde dans ce milieu.
On rappelle que : $V^2 = \kappa\rho_0$ et que $p(x,t) = -\kappa\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$, κ étant le module de compression du gaz et p(x,t) la surpression acoustique.
2. La figure 3 représente l'évolution de la surpression p, en fonction de la position x, à deux instants $t_1 = 0$ et $t_2 = 3T/4$ (T est la période des oscillations). Déterminer à partir de cette figure le sens de propagation de l'onde, en justifiant avec clarté votre raisonnement.
3. L'évolution de la surpression acoustique instantanée peut être décrite par une relation générale sous la forme : $p(x,t) = P_M \cos(\omega t + kx + \phi)$. En utilisant la figure 3, exprimer $p(x,t)$ en fonction des paramètres P_M, V et T. Déterminer la valeur numérique de la fréquence de l'onde.
4. Montrer qu'il serait possible de retrouver cette fréquence en connaissant seulement Z et les amplitudes P_M et U_M.
5. Exprimer et calculer l'intensité acoustique I. Pour l'application numérique, on donne $P_M = 0{,}2$ Pa.

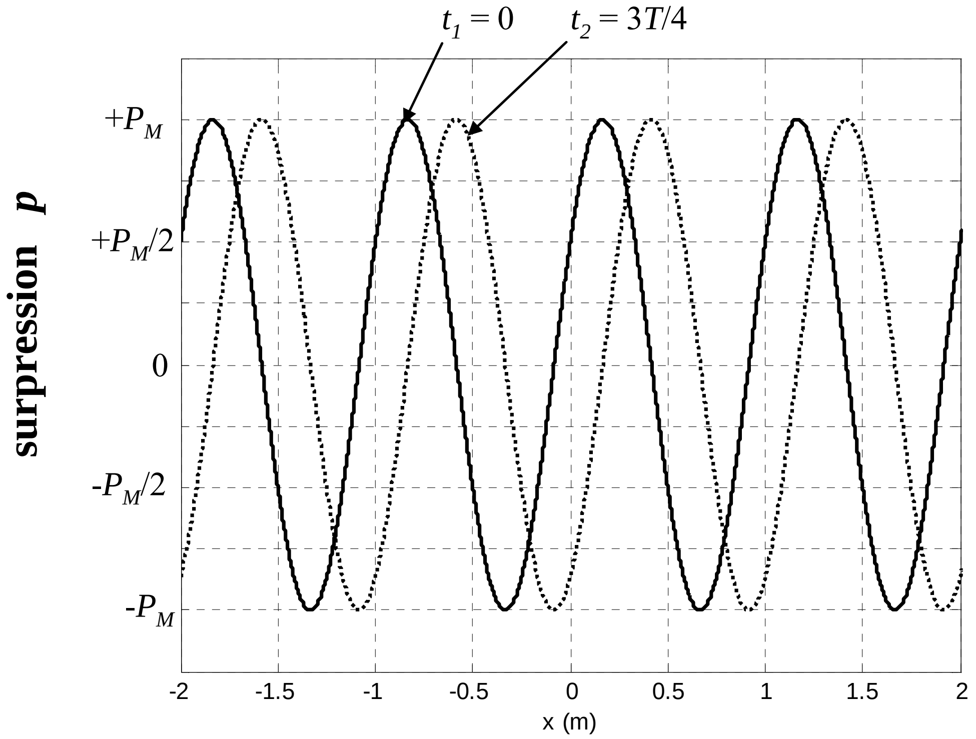
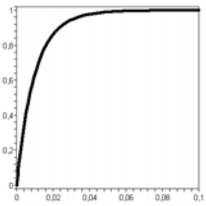
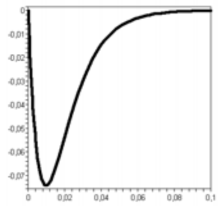


Figure 3

Solution Interrogation n°3 du 18 janvier 2007

Questions de cours			
A.1	Flux total Φ embrassé : $\Phi = N_1.\phi = L.I$ avec ϕ le flux créé par la bobine : $\phi = B_1.S_1$ et $B_1 = \mu_0.n_1.I = \mu_0.\frac{N_1}{l_1}.I$ ……. donc, $\Phi = \mu_0 \frac{N_1^{\ 2} S_1}{l_1} I$ et $L = \mu_0 \frac{N_1^{\ 2} S_1}{l_1}$ …………………………………………… A.N. L = 3 mH ………………………………………………………………..	0.5 0.5 0.5	
A.2	Compléter le schéma pour préciser les sens des courants et en déduire le signe de l'inductance mutuelle M : $M > 0$ si les sens > 0 sont les mêmes Hyp. : la bobine (3) étant petite devant (2), elle est soumise à un champ uniforme de valeur $B = \frac{\mu_0 N_2 i_2}{2a}$ La composante de ce champ normale au plan de (3) est : $B = \frac{\mu_0 N_2 i_2}{2a} \cos\theta$ $\Phi_{23} = N_3.\phi_{23} = M.i_2$ et $\phi_{23} = \overrightarrow{B_2} \cdot \overrightarrow{S_3} = S_3 \frac{\mu_0 N_2 i_2}{2a} \cos\theta$ → $M = \frac{\mu_0 N_2 N_3 S_3}{2a} \cos\theta$ ……………………………..	0.5 0.5 0.5	
B.1	$V = c/n$ avec $n = \sqrt{\mu_r.\varepsilon_r}$ A.N. $V = 8{,}66 \cdot 10^6\ m.s^{-1}$ $\lambda = V/f$ A.N. $\lambda = 2{,}9\ m$	0.5 0.5 0.5	
B.2	$E_0 / B_0 = V$, donc $B_0 = 1{,}73.10^{-9}\ T$	0.5	
		5 pts	
Exercice n°1			
1	$R_1 i_1 + L\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} = E$ $R_2 i_2 + L\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} = 0$	0.5 0.5	
2	$I(t) = i_1 + i_2$ et $J(t) = i_1 - i_2$ $RI + (L+M)\frac{dI}{dt} = E$ $RJ + (L-M)\frac{dJ}{dt} = E$	0.5 0.5	
3	$\tau_1 = \frac{L+M}{R}$ et $\tau_2 = \frac{L-M}{R}$ continuité du courant dans les inductances : $i_1(t=0^+) = 0$ et $i2(t=0^+) = 0$ => $I(t=0^+) = 0$ et $J(t=0^+) = 0$ $I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \mathbf{exp}\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)\right)$ ………………………………………………..	0.25 0.25 0.5	

	$J(t)=\frac{E}{R}\left(1-\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)\right)$ …………………………………………………	0.5	
4	$i_1(t)=\frac{E}{R}\left(1-\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)-\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)\right)$ $i_2(t)=\frac{E}{2R}\left(\exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)-\exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)\right)$ *i*$i_1(t)$  $i_2(t)$  (pour M>0)	0.5 0.5 2x0.25	
		5 pts	
Exercice n°2			
	$Ri_1+L\frac{di_1}{dt}=e(t)$ $M\frac{di_1}{dt}=u_2(t)$	0.25 0.25	
2	$i_1(t)$ = solution générale de l'équation homogène associée sans second membre + solution particulière de la forme de l'excitation du circuit (régime forcé sinusoïdal) $i_1(t)=K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)+I_1\cos(\omega t+\phi)$ ……………..…………………………….. avec $\tau=\frac{L}{R}$ …………………………………………………………………… régime forcé : $\underline{e}(t)=(R+jL\omega)\underline{i_1}$ $I_1=\frac{E}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}$ …………………………………………………………… $\phi=-\arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$ …………………………………………………………… continuité du courant dans l'inductance : $i_1(0^+)=0$ d'où $K=-I_1\cos\phi$ …… soit $i_1(t)=I_1\left[\cos(\omega t+\phi)-\cos(\phi)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$ ……………………………………	0.25 0.25 0.25 0.25 0.5 0.5 0.5 0.5	
3	alors $u_2(t)=M\frac{di_1}{dt}=MI_1\left[-\omega\sin(\omega t+\phi)+\frac{\cos(\phi)}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$	0.5	
4	$I_1=\frac{E}{\sqrt{R^2+(L\omega)^2}}\approx 9.54$ mA $U_R=RI_1\approx 954$ mV $U_{L1}=L_1\omega I_1\approx 300$ mV $U_2=MI_1\omega\approx 150$ mV	0.25 0.25 0.25 0.25	
		5 pts	

Exercice n°3			
1	$V = \sqrt{\kappa / \rho_0}$ Pour une onde se propageant dans le sens des x croissants $p(x,t) = -\kappa \dfrac{\partial u}{\partial x} = Z \dfrac{\partial u}{\partial t}$ Or d'après u(x,t) = f(x-Vt), $\dfrac{\partial u}{\partial t} = -V \dfrac{\partial u}{\partial x}$ donc $Z = \dfrac{\kappa}{V} = \sqrt{\kappa \rho_0}$ Si les étudiants connaissent par cœur l'expression de Z, mettre 0,25/0,5 soit $V = Z / \rho_0$ A.N. $V = 333.3\ m/s$	0.5 0.25 0.25	
2	Entre $t_1 = 0$ et $t_2 = 3T/4$, l'onde parcourt une distance $3\lambda/4$. Le sens de déplacement est donc dirigé vers x décroissant.	0.5	
3	$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ et $k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{2\pi}{VT}$ ……………………………………………………….. $p(x=0, t=0) = P_M \cos(\phi) = 0{,}5 P_M$, donc $\phi = \pm \dfrac{\pi}{3}$ …………………………... A t = 0 et x = 0, la pente est positif si $\phi = -\dfrac{\pi}{3}$ ……………………………… Et donc : $p(x,t) = P_M \cos\left[2\pi\left(\dfrac{t}{T} + \dfrac{x}{VT}\right) - \dfrac{\pi}{3}\right]$ Sur la figure, $\lambda = 1m$, on a donc : $f = \dfrac{V}{\lambda}$ A.N. $f = 333{,}3Hz$	0.25 + 0.25 0.5 0.5 0.5	
4	$p = -Z\dot{u}$ donne $P_M = Z\omega U_M$ soit $f = \dfrac{P_M}{2\pi Z U_M}$	0.5 0.5	
5	$I = \dfrac{P_M^2}{2Z}$ A.N. $I = 5.10^{-5}$ W/m^2	0.5	
		5 pts	