Premier cycle 2$^{\text{ème}}$ année

Contrôle de physique n°4

Mercredi 15 mars 2006, durée 1h30, sans documents, avec calculatrice autorisée.
Barème prévisionnel : Questions de cours 4 pts ; Problème A : 8 pts ; Problème B : 8 pts.

Questions de cours

1) On considère une source sonore harmonique se déplaçant à une vitesse subsonique, comme indiqué sur la figure 1. Indiquer la nature de l'effet Doppler pour des observateurs fixes situés aux points A, B, et C, en la justifiant brièvement (sans formule) à l'aide d'un schéma.

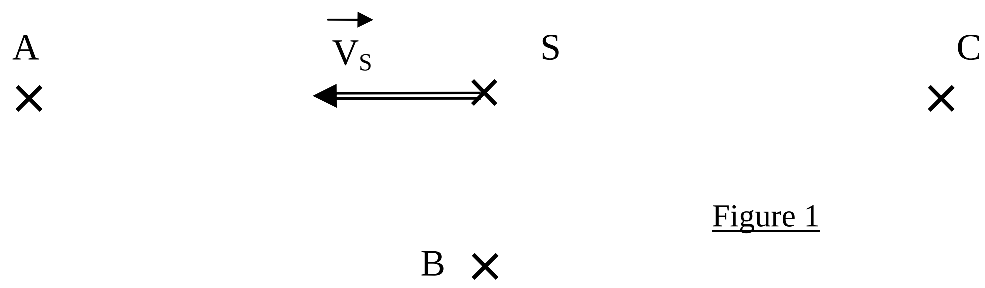


Figure 1

2) A quelle partie du cours de physique pouvez vous rattacher le phénomène d'arc-en-ciel (justifier la réponse) ?

3) Trois sources harmoniques cohérentes rayonnent des ondes décrites par des grandeurs scalaires. L'amplitude et l'intensité de la perturbation reçue en un point P pour chaque source rayonnant seule sont respectivement notées A et I (identiques pour toutes les sources). Quelles sont l'amplitude et l'intensité totales en P lorsque :

- les trois sources rayonnant simultanément fournissent en P des ondes en phase.
- deux sources fournissent en P des ondes en phase, l'autre fournit des ondes en opposition de phase avec les deux autres.
- les ondes arrivant en P sont régulièrement déphasées de $2\pi/3$ les unes par rapport aux autres.

Problème A : Etude des conditions de propagation d'une onde électromagnétique plane longitudinale.

Dans cette partie, on recherche dans quelles conditions et dans quel type de milieu (A) on pourrait envisager la propagation, le long d'un axe Ox, d'une onde plane uniforme électromagnétique de type « longitudinale ». Soit $\vec{E}_\ell = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_x$ l'expression du champ électromagnétique associé à une telle onde progressive, dans laquelle E_0 est une constante et $\vec{u}_x$ un vecteur unitaire parallèle à Ox.

1) Déterminer $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{E_\ell})$ pour cette onde.

2) A l'aide de la relation de Maxwell-Faraday, en déduire la valeur particulière de $\vec{B}(x,t)$ qui doit être associé à cette onde.

3) Comparer la structure d'une telle onde plane avec celle d'une onde plane se propageant dans un diélectrique isolant, non chargé.

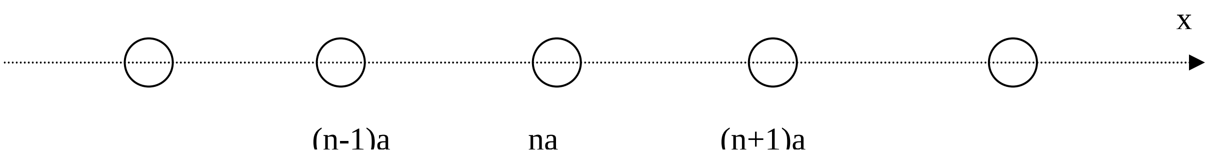
4) Rappeler la démonstration qui permet de déterminer l'orientation de $\vec{E}(x,t)$ dans le cas de l'onde plane se propageant dans le diélectrique isolant non chargé. En déduire la propriété que devrait nécessairement satisfaire le milieu (A) dans lequel on pourrait envisager la propagation d'une telle onde électromagnétique longitudinale.

5) En supposant que le milieu (A) soit trouvé, l'onde plane $\overrightarrow{E_\ell}(x,t)$ longitudinale se propageant dans ce milieu aborde en incidence normale un conducteur parfait semi-infini limité par une surface plane (Oy, Oz) (milieu (A) pour x<0 et milieu conducteur pour x>0). Ecrire la condition que doivent satisfaire, sur la surface (Oy, Oz), les ondes incidente, réfléchie et transmise. En déduire l'expression de l'onde réfléchie $\overrightarrow{E_{r\ell}}(x,t)$ dans le milieu A.

6) Déterminer l'expression du champ électrique total $\overrightarrow{E_T}(x,t)$ résultant de la superposition des deux ondes $\overrightarrow{E_\ell}(x,t)$ et $\overrightarrow{E_{r\ell}}(x,t)$ dans le milieu (A). Préciser la nature de l'onde ainsi constituée.

__Problème B : Propagation d'une onde longitudinale le long d'une rangée d'atomes identiques__

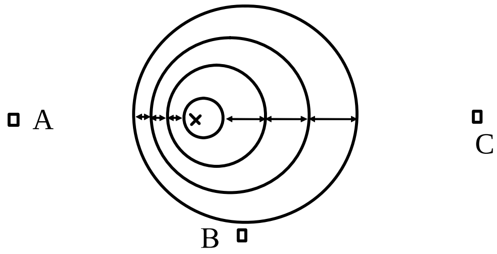
On considère une rangée infinie d'atomes identiques, de masse m, repérés par les indices n-1, n, n+1, etc…., placés à l'équilibre sur un axe Ox aux positions x = (n-1)a, na, (n+1)a etc…



Les déplacements par rapport à la position d'équilibre sont représentés par u_{n-1}, u_n, u_{n+1}. Une force de rappel est induite par les interactions avec les atomes « premiers voisins » de la rangée. La valeur algébrique de cette force sur l'axe Ox s'écrit : $F_n = b(u_{n+1} - u_n) + b(u_{n-1} - u_n)$ où b est une constante.

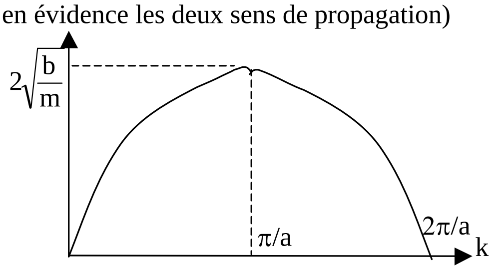
1) Ecrire l'équation fondamentale du mouvement de l'atome n (on négligera les forces de la pesanteur).
2) On cherche des solutions sous la forme d'ondes progressives sinusoïdales $\underline{u}_n = Ae^{j(\omega t - kx)}$. On suppose que les déplacements u_n sont petits par rapport aux distances interatomiques. En déduire que la relation de dispersion peut se mettre sous la forme : $\omega^2 = D\sin^2(\frac{ka}{2})$ où D est une constante que l'on demande de déterminer.
3) Représenter cette fonction ω(k). Montrer qu'on peut se restreindre à un intervalle de vecteur d'onde limité. Montrer qu'il existe une fréquence au-delà de laquelle la propagation n'est plus possible. Quelle est la longueur d'onde correspondante. En déduire la situation vibratoire particulière correspondant à cette fréquence limite et expliquer alors pourquoi il n'y a plus d'onde progressive.
4) Calculer la vitesse de phase, V_ϕ, et la vitesse de groupe, V_g, et montrer que leurs limites pour les grandes longueurs d'ondes sont égales à une vitesse unique, V_s.
5) On donne b = 10 N/m, a = 2 Å, et m = 5.10^{-27} kg. Calculer numériquement la vitesse V_s. Préciser la grandeur physique à laquelle correspond cette vitesse. Justifier votre réponse.

Corrigé du Contrôle de Physique 4
15 mars 2006

Cours	Réponse
1)	 La longueur d'onde de la perturbation ressentie par A est réduite (fréquence augmentée), par C est augmentée (fréquence réduite) et par B quasiment inchangée par rapport à une source fixe.
2)	Au phénomène de dispersion de vitesse des ondes : l'arc en ciel est du à la réfraction à l'interface air-eau des gouttelettes de pluie, qui dépend de l'indice de l'eau, donc de la vitesse des ondes. L'angle de réfraction dépend donc de la longueur d'onde, c'est-à-dire de la couleur.
3)	Ondes en phase : $A_3 = 3$ A ; $I_3 = 9$ I 2 ondes en phase et une en opposition : $A_3 = A$; $I_3 = I$ 3 ondes régulièrement déphasées : A = 0 ; I = 0

ProblèmeA	Réponse
1)	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{E_\ell}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} E_\ell \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$
2)	L'équation de Maxwell-Faraday conduit à $\frac{\partial \vec{B}_\ell}{\partial t} = 0$ Seule solution possible un champ statique (indépendant de t), ce qui ne correspond pas à une onde, donc la partie variable est nécessairement nulle $\vec{B}_\ell(x,t) = 0$
3)	Pour un diélectrique non chargé, on aurait $\vec{E}(x,t)$ transversal. $\vec{B}(x,t)$ également transversal, avec $\vec{E}(x,t)$, $\vec{B}(x,t)$ et direction de propagation → trièdre trirectangle direct.
4)	div $\vec{D}(x,t) = \varepsilon \mathrm{div}\vec{E}(x,t)$ = ρ = 0 pour un diélectrique non chargé. D'où $\frac{\partial E_x(x,t)}{\partial x} = 0$ ⇒ $E_x(x,t)$ = cste en fonction de x ⇒ seule solution possible pour une onde $E_x(x,t) = 0$ ⇒ Pour qu'une onde plane ne soit pas transversale, il est nécessaire que $\mathrm{div}\vec{E}(x,t)$ ne soit pas nul, donc le milieu doit être chargé (au moins localement) ou $\rho \neq 0$.
5)	*Ici, le champ électrique est normal à l'interface. La condition de passage s'écrit $D_{n2} - D_{n1} = \sigma$ avec D_{n2} nul dans le conducteur et $D_{n1} = D_{nincident} + D_{nréfléchi} = \sigma$. On ne peut pas utiliser cette condition de passage pour calculer le champ réfléchi car conducteur parfait ne signifie pas $\sigma = 0$ et on ne connaît pas σ.* *La condition à considérer à l'interface est une condition énergétique.* Conducteur parfait ⇒ D (et E) transmis nuls dans le conducteur. Pas d'énergie transmise ⇒ réflexion totale ⇒ Champ réfléchi de même amplitude que le champ incident, dont la forme générale sera : $\overrightarrow{E_{r\ell}}(x=0,t) = E_0 \cos(\omega t + \psi)\vec{u}_x$ (ψ déphasage à la réflexion inconnu, dépend de σ) soit $\overrightarrow{E_{r\ell}}(x,t) = E_0 \cos(\omega t + kx + \psi)\vec{u}_x$

6)	$\overrightarrow{E_T}(x,t) = 2E_0 \cos(\omega t + \psi/2)\cos(kx + \psi/2)\vec{u}_x$ Onde stationnaire

Problème B	Réponses
1)	$m\dfrac{d^2u_n}{dt^2} = b(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$
2)	u_n peut être assimilé à u(x) avec $x \cong na$ (idem pour u_{n-1} et u_{n+1}) En utilisant la notation complexe il vient : $-m\omega^2A = bA[\exp(jka)+\exp(-jka)-2]$ Et finalement $\omega^2=2b\,(1-\cos(ka))/m$ ou $\omega^2 = \dfrac{4b}{m}\sin^2\left(\dfrac{ka}{2}\right)$ soit D = 4 b/m
3)	$\omega = 2\sqrt{\dfrac{b}{m}}\left\|\sin\left(\dfrac{ka}{2}\right)\right\|$ La fonction ω(k) est périodique de période 2π/a. On peut donc se restreindre à 0<k<2π/a. (ou à -π/a < k < π/a, ce qui met en évidence les deux sens de propagation)  $\omega > 2\sqrt{\dfrac{b}{m}}$ nécessiterait sin(ka/2) > 1 , ce qui est impossible ⇒ pas de propagation d'onde progressive au-delà de cette pulsation de coupure. Pour la pulsation limite la longueur d'onde est **λ** = 2a. On en déduit que deux atomes successifs vibrent alors en opposition de phase : il n'y a plus aucun caractère progressif le long de la chaîne.
4)	La vitesse de phase est donnée par $V_\Phi = \omega/k$ $V_\phi = 2\sqrt{\dfrac{b}{m}}\,\dfrac{\left\|\sin(\frac{ka}{2})\right\|}{k}$ La vitesse de groupe est donnée par $V_g = \dfrac{d\omega}{dk}$ $Vg = a\sqrt{\dfrac{b}{m}}\left\|\cos(\dfrac{ka}{2})\right\|$ Dans les deux cas la limite pour k tendant vers 0 est $V_s = a\sqrt{\dfrac{b}{m}}$
5)	V_s = 8940 m/s Cette vitesse peut représenter la propagation dans un solide (constitué d'un grand nombre de chaînes identiques réagissant en parallèle). C'est celle du son dans un solide. Dans la limite des grandes longueurs d'onde (ici λ>90cm dans le domaine des sons), on peut considérer le milieu continu.